АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

С. П. Соколова, Р. С. Ивлев
Институт проблем информатики и управления МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: sokolova@ipic.academ.alma-ata.su

В работе предлагается методика исследования свойства асимптотической устойчивости линейной интервально-заданной системы с запаздываюшим аргументом на основе второго метода Ляпунова и методов интервального анализа. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости с использованием понятий функционалов Ляпунова — Красовского.

Введение

Задачи исследования динамических свойств систем управления в условиях параметрической неопределенности, имеющие своими корнями работу [11], приобретают все большую актуальность. Впервые сформулированная в [11], а затем исследованная и получившая исчерпывающее решение в [4] задача об асимптотической устойчивости интервального характеристического полинома послужила толчком для дальнейших исследований в этой области. Последующее развитие подходов работы [4] позволило ее автору обобщить полученные результаты на случай интервальных квазиполиномов [5], встречающихся при исследовании дифференциально-разностных уравнений. Среди более поздних работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости положения равновесия дифференциально-разностных уравнений с запаздывающим аргументом, следует указать работу [6] и имеющиеся там ссылки, являющуюся развитием работы [5]. В работе [6] получены достаточные условия асимптотической устойчивости интервального квазиполинома на основе исследования четырех функций, построенных специальным образом.

Несколько иное положение дел обстоит в области исследования динамических свойств интервальных систем, заданных в пространстве состояний. Попытки обобщить результаты работы [4] и получить аналоги теорем Харитонова для интервальных матриц [9] потерпели неудачу, о чем свидетельствуют убедительные контрпримеры [13, 8]. В настоящее время имеется достаточно много работ, посвященных исследованию асимптотической устойчивости линейных интервальных систем, заданных в пространстве состояний, среди которых, по мнению авторов, наиболее плодотворной в своей области является работа [15]. В то же время работ, в которых рассматривалась бы задача исследования динамических свойств интервальных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа, заданных в пространстве состояний, крайне мало, что в сочетании с растущей актуальностью указанной задачи вызывает большой научный интерес.

1. Обозначения и постановка задачи

Всюду в работе полужирным шрифтом будут обозначаться интервальные величины, в то время как обычным шрифтом — неинтервальные. Символом нижнего и верхнего подчеркивания будут обозначаться соответственно нижняя и верхняя границы интервала; $\mathrm{mid}\ \mathbf{a} = (\underline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}})/2$ — середина интервала $\mathbf{a}$; $\mathrm{rad}\ \mathbf{a} = (\overline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{a}})/2$ — радиус интервала $\mathbf{a}$. Операции mid, rad, взятия нижней и верхней границ интервалов применительно к матрицам и векторам будут пониматься в поэлементном смысле.

Пусть возмущенное движение интервально-заданной системы в пространстве состояний задано дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа, имеющего следующий векторно-матричный вид:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{A}_\tau x(t-\tau), \quad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0-\tau; t_0], \tag{1}$$

где $t \in [t_0-\tau;\infty)$ — независимая переменная (время); $t_0 \in \mathbb{R}$ — начальный момент времени; $\tau \in \mathbb{R}_+$ — запаздывание; $x(t)$ — вектор состояний, $x(t) = (x_i(t))$, $x_i(t)$ — непрерывные на $[t_0-\tau;\infty)$ функции;

$1 \le i \le n$; $\mathbf{A}, \mathbf{A}_\tau \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ — постоянные интервальные матрицы, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})$, $\mathbf{a}_{ij} = [\underline{\mathbf{a}}_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij}]$; $\mathbf{A}_\tau = (\mathbf{a}_{\tau_{ij}})$, $\mathbf{a}_{\tau_{ij}} = [\underline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}, \overline{\mathbf{a}}_{\tau_{ij}}]$, $1 \le i,j \le n$; $\mathbb{IR}$ — множество всех вещественных интервалов [1, 7], $\mathbb{IR} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}} \le x \le \overline{\mathbf{x}},\ \underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}\}$; $\varphi_{t_0\tau}(\theta)$ — начальная функция, принадлежащая пространству непрерывных на $[-\tau; 0]$ функций $\varphi_{t_0\tau}(\theta) \in C[-\tau; 0]$.

Всюду в дальнейшем математическую модель системы, записанную в виде (1), будем понимать как семейство математических моделей систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau), \qquad x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau; t_0], \tag{2}$$

для которых $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, в формальном виде вышесказанное будем записывать

$$\{x(t) \in \mathbb{R}^n \mid \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau),\ x(\theta) = \varphi_{t_0\tau}(\theta),\ \theta \in [t_0-\tau; t_0],\ A \in \mathbf{A},\ A_\tau \in \mathbf{A}_\tau\}. \tag{3}$$

Определение 1. *Интервально-заданная система (1) обладает свойством асимптотической устойчивости, если асимптотически устойчива любая система (2) где $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, т. е. для любых матриц $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при всяком $t \ge t_0$ и при всяких начальных функциях $\varphi_{t_0\tau}(\theta)$, заданных на отрезке $[t_0 - \tau; t_0]$, удовлетворяющих условию $||\varphi_{t_0\tau}(\theta)|| < \delta$, решение $x(t, \varphi_{t_0\tau})$ системы (2) удовлетворяет условиям*

$$||x(t, \varphi_{t_0\tau})|| < \varepsilon$$

и

$$\lim_{t\to\infty} ||x(t, \varphi_{t_0\tau})|| = 0,$$

где $||x(t)|| = \sup\{|x_i(t)|,\ 1 \le i \le n,\ -\tau < t < 0\}$.

Требуется определить условия, при которых интервально-заданная система с запаздыванием (1) будет обладать свойством асимптотической устойчивости в указанном выше смысле.

В настоящее время наметилось два основных подхода к решению задачи исследования асимптотической устойчивости систем управления с отклоняющимся аргументом, заданные в пространстве состояний. Оба подхода основаны на идее использования второго метода Ляпунова, суть которого применительно к дифференциальным уравнениям возмущенного движения системы заключается в выборе некоторой непрерывной функции $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, играющей роль обобщенного расстояния до начала координат; убывание выбранной функции вдоль траекторий движения исследуемой системы будет означать асимптотическую устойчивость положения равновесия $x(t) \equiv 0$. Поскольку непосредственный перенос прямого метода Ляпунова на класс дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом имеет ряд ограничений, главным образом заключающихся в сложности определения условий убывания функции Ляпунова вдоль траекторий движения системы, в обоих вышеупомянутых подходах сделано основное усилие на преодоление указанных трудностей. Первый из них основан на использовании принципа Разумихина, скалярно-оптимизационных функций и построения эффективных оценок воронок для отрезков интегральных линий дифференциального уравнения [3]. Однако более плодотворней оказалась идея Н.Н. Красовского [2], предложившего использовать вместо функций Ляпунова обладающие аналогичными свойствами функционалы. Замечателен тот факт, что для рассматриваемого класса интервальных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа (1) может быть применена без существенных изменений доказанная в [2] вторая теорема Н. Н. Красовского об асимптотической устойчивости, которая применительно к (1) может быть сформулирована в виде:

Теорема 1. *Положение равновесия $x(t, \varphi_{t_0\tau}) \equiv 0$ с начальной функцией $\varphi(\theta) \equiv 0$, $t_0 - \tau \le \theta \le t_0$ системы (1) асимптотически устойчиво, если существует функционал $V(x(s), t)$, удовлетворяющий условиям:*

$$V(x(s), t) \le W_1(||x||) + W_2(||x(s)||_{\tau_2}), \tag{4}$$

$$V(x(s), t) \ge W(||x||), \tag{5}$$

$$\lim_{\Delta t\to+0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t} \le -\psi(||x||), \tag{6}$$

где $W_1(r)$ и $W_2(r)$ — монотонно возрастающие функции при $r \ge 0$, причем $W_1(0) = W_2(0) = 0$, $W(r)$ и $\psi(r)$ — непрерывные, положительные при $r > 0$ функции,

$$||x||_{\tau_2} = \left(\int_{-\tau}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(s) ds \right)^{1/2},$$

переменная s изменяется в пределах $-\tau \le s \le 0$.

Легко видеть, что функционал

$$V\left(x(s)\right) = x^T(t)Hx(t) + \int\limits_{-\tau}^{0} x^T(s)Dx(s)ds, \tag{7}$$

где $H = H^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-определенная симметрическая матрица, $D = \mathrm{diag}\{d_i > 0,\ 1 \le i \le n\}$ — диагональная матрица, удовлетворяет условиям (4) и (5) теоремы Н. Н. Красовского, однако вычисление правого верхнего производного числа $\lim\limits_{\Delta t\to\infty} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}$ для выбранного функционала (7) в силу (1), где верхняя грань берется по всем матрицам $A \in \mathbf{A}$, $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, может оказаться весьма трудоемкой на практике задачей. Для точечных матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ значение правого верхнего производного числа совпадает с обычной производной функционала (7) по времени в силу (2).

2. Основной результат

Для проведения дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

Определение 2. *[2] Функционал $V\left(x(s), t\right)$ называется положительно-определенным, если существует непрерывная функция $\phi(r)$, такая, что $\phi(r) > 0$ при $r \ne 0$ и*

$$V\left(x(s), t\right) \ge \phi\left(||x(s)||\right).$$

Аналогично определяется отрицательно-определенный функционал. Можно показать, что при выбранных матрицах H и D функционал (7) является положительно-определенным.

Определение 3. *Интервальную квадратную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})$, $\mathbf{q}_{ij} = [\underline{\mathbf{q}}_{ij}, \overline{\mathbf{q}}_{ij}]$, $1 \le i, j \le n$ будем называть положительно-определенной и записывать $\mathbf{Q} \rhd 0$, если положительно определена любая матрица $Q \in \mathbf{Q}$, т. е. $\forall Q \in \mathbf{Q}$ квадратичная форма $x^TQx > 0$ $\forall x \ne 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 4. *[12] Множество матриц вида*

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = [\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}, \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}] = \{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q = Q^T, \underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \le Q \le \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}\},$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, будем называть симметрической интервальной матрицей и записывать $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} = (\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})^T$.

Из определения 4 ясно, что нижняя и верхняя границы $\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}}, \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ являются симметрическими

$$\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} = (\underline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}})^T,\ \overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}} = (\overline{\mathbf{Q}}^{\mathrm{sym}})^T,$$

а матрица $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}} \notin \mathbb{IR}^{n\times n}$. В работе [12] для таких матриц используется термин *интервальные матрицы с зависимостями*, поскольку значения внедиагональных элементов такой матрицы, лежащих симметрично относительно главной диагонали, зависят друг от друга.

В настоящей работе решение поставленной задачи основывается на следующем вполне очевидном утверждении: *пусть для произвольных матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ производная по времени функционала (7) в силу уравнений (2) является отрицательно-определенным функционалом, т. е. существует непрерывная функция $\phi(r)$, такая, что $\phi(r) > 0$ при $r \ne 0$ и*

$$\frac{d}{dt}\left(V\left(x(s)\right)\right)\Bigg|_{\dot{x}(t)=Ax(t)+A_\tau x(t-\tau)} \le -\phi\left(||x(s)||\right), \tag{8}$$

тогда имеет место (6).

Иными словами, функция $\phi\left(||x(s)||\right)$ мажорирует производную по времени функционала (7) в силу (2) равномерно по всем матрицам $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$.

В соответствии с выбранным подходом для произвольных матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ вычислим полную производную функционала (7) по времени вдоль траекторий системы (2):

$$\frac{dV\left(x(s)\right)}{dt} = \dot{x}^T(t)Hx(t) + x^T(t)H\dot{x}(t) + x^T(t)Dx(t) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) = \tag{9}$$

$$= \left(x^T(t)A^T + x^T(t-\tau)A_\tau^T\right) Hx(t) + x^T(t)H\left(Ax(t) + A_\tau x(t-\tau)\right) + x^T(t)Dx(t) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau) =$$
$$= x^T(t)\left(A^TH + HA + D\right)x(t) + x^T(t-\tau)A_\tau^T Hx(t) + x^T(t)HA_\tau x(t-\tau) - x^T(t-\tau)Dx(t-\tau).$$

Введем вектор $y(t) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{pmatrix}$$

и матрицу $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$C = \begin{pmatrix} A^TH + HA + D & HA_\tau \\ A_\tau^T H & -D \end{pmatrix}, \tag{10}$$

тогда выражение для $dV\left(x(s)\right)/dt$ можно переписать в виде

$$\frac{dV\left(x(s)\right)}{dt} = y^T(t)Cy(t). \tag{11}$$

Если производная по времени (9) функционала $V\left(x(s)\right)$ на траекториях движения системы (2) является отрицательно-определенной для любых матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (2) будет асимптотически устойчивым при любых $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ и, следовательно, интервально-заданная система с запаздыванием (1) асимптотически устойчива в смысле определения 1.

Пусть $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ некоторая интервальная положительно-определенная симметрическая матрица. Для интервальных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ построим множество матриц $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})(A^TH + HA = -Q)\} = \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(A^TH + HA \in -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})\},\end{aligned} \tag{12}$$

которое называется допустимым множеством решений [16, 17] интервального матричного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}^TH + H\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}. \tag{13}$$

Справедливой является следующая

Теорема 2. *Пусть для заданной интервальной матрицы* $\mathbf{A}$ *и некоторой интервальной симметрической положительно-определенной матрицы* $\mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$ *допустимое множество (12) непусто, т. е.* $\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}) \neq \emptyset$, *некоторая симметрическая матрица* $\tilde{H} = \left(\tilde{H}\right)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ *является положительно-определенной, и существуют такие постоянные* $d_i > 0,\ 1 \leq i \leq n$, *что интервальная матрица*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T\tilde{H} + \tilde{H}\mathbf{A} + D & \tilde{H}\mathbf{A}_\tau \\ \mathbf{A}_\tau \tilde{H} & -D \end{pmatrix} \tag{14}$$

является отрицательно-определенной, тогда интервально-заданная система с запаздыванием (1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Положительная определенность симметрической матрицы $\tilde{H} \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}})$ влечет асимптотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$. Действительно, в силу построения множества (12) для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$ существует такая положительно-определенная симметрическая матрица $\tilde{Q} \in \mathbf{Q}^{\mathrm{sym}}$, что

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A = -\tilde{Q}.$$

Иными словами, матрица $A^T\tilde{H} + \tilde{H}A$ является симметрической отрицательно-определенной, а это в силу известных результатов [2] означает асимптотическую устойчивость матрицы A, что, в свою очередь, влечет асимтпотическую устойчивость интервальной матрицы $\mathbf{A}$, в силу произвольности выбора $A \in \mathbf{A}$.

Отрицательная определенность интервальной матрицы $\mathbf{C}$ согласно определению 3 означает, что для любых матриц $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$ матрица

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} A^T\tilde{H} + \tilde{H}A + D & \tilde{H}A_\tau \\ A_\tau^T \tilde{H} & -D \end{pmatrix}$$

будет отрицательно-определенной. Тогда производная по времени (9), записанная в виде (11), функционала (7) с учетом выбранных $\tilde{H}$ и $D = \mathrm{diag}\{d_i > 0,\ 1 \leq i \leq n\}$ будет отрицательна на траекториях (2) при любых $A \in \mathbf{A}$ и $A_\tau \in \mathbf{A}_\tau$, откуда утверждение (8) следует немедленно. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены, следовательно интервально-заданная система (1) с запаздывающим аргументом асимптотически устойчива. Теорема доказана.

В настоящее время задача исследования непустоты допустимого множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений является хорошо изученной [16, 17]. Однако, как указывалось ранее, $\mathbf{Q}^{\text{sym}} \notin \mathbb{IR}^{n\times n}$, поэтому для применения результатов работ [16, 17] к исследованию непустоты (13) потребуется ряд дополнительных построений: по заданной интервальной матрице $\mathbf{Q}^{\text{sym}}$ построим матрицу $\mathbf{Q} = [\underline{\mathbf{Q}}^{\text{sym}}; \overline{\mathbf{Q}}^{\text{sym}}] \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и множество

$$\begin{aligned}\Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(\exists Q \in \mathbf{Q})(A^T H + HA = -Q)\} = \\ &= \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (\forall A \in \mathbf{A})(A^T H + HA \in -\mathbf{Q}\} = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} \subseteq -\mathbf{Q}\},\end{aligned} \tag{15}$$

которое является допустимым множеством решений интервального уравнения

$$\mathbf{A}^T H + H\mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \tag{16}$$

имеющее в правой части интервальную матрицу $\mathbf{Q} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ без зависимостей. Уравнение (16) будем называть вспомогательным интервальным матричным уравнением Ляпунова.

Теорема 3. *Пусть допустимое множество решений (15) вспомогательного интервального матричного уравнения Ляпунова (16) непусто, и некоторая симметрическая матрица $\tilde{H} = \tilde{H}^T$ принадлежит данному множеству, т. е.*

$$\tilde{H} = \tilde{H}^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}) \neq \emptyset, \tag{17}$$

тогда

$$\{\tilde{H} \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \tilde{H} \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}),\ \tilde{H} = \tilde{H}^T\} \subseteq \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}^{\text{sym}}). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть условие (17) теоремы выполнено. По условию теоремы существует некоторая симметрическая матрица $\tilde{H} = \left(\tilde{H}\right)^T \in \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q})$, тогда

$$(A^T\tilde{H} + \tilde{H}A)^T = \tilde{H}^T A + A^T\tilde{H}^T = \tilde{H}A + A^T\tilde{H} = A^T\tilde{H} + \tilde{H}A,\ \forall A \in \mathbf{A}, \tag{19}$$

т. е. матрица $A^T\tilde{H} + \tilde{H}A$ является симметрической для любой $A \in \mathbf{A}$. По условию теоремы

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A \in -\mathbf{Q},\ \forall A \in \mathbf{A}. \tag{20}$$

Принимая во внимание (19) и (20), можно заключить, что существует симметрическая матрица $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T \in \mathbf{Q}$ такая, что

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A = -\tilde{Q}.$$

Согласно определению 4 имеем

$$\mathbf{Q}^{\text{sym}} = \left\{Q \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Q \in \mathbf{Q},\ Q = Q^T\right\}, \tag{21}$$

т. е.

$$\mathbf{Q}^{\text{sym}} \subseteq \mathbf{Q},$$

тогда, учитывая выражение (21), можно записать

$$A^T\tilde{H} + \tilde{H}A \in -\mathbf{Q}^{\text{sym}}.$$

Последнее верно для произвольной симметрической матрицы $\tilde{H}$, удовлетворяющей (17), следовательно включение (18) является справедливым. Теорема доказана.

Легко показать, что соотношение относительно матрицы H

$$|\,\mathrm{mid}\mathbf{A}^T H + H\mathrm{mid}\mathbf{A} + \mathrm{mid}\mathbf{Q}\,| \leq \mathrm{rad}\mathbf{Q} - \mathrm{rad}\mathbf{A}^T|H| - |H|\mathrm{rad}\mathbf{A} \tag{22}$$

аналогичное предложенному Роном [14], выделяет класс матриц H, принадлежащих множеству (15). Из соотношения (22) видно, что если некоторая матрица $\tilde{H}$ является решением “среднего” точечного уравнения Ляпунова

$$\mathrm{mid}\mathbf{A}^T\tilde{H} + \tilde{H}\mathrm{mid}\mathbf{A} = -\mathrm{mid}\mathbf{Q} \tag{23}$$

и удовлетворяет условию

$$\mathrm{rad}\mathbf{A}^T|\tilde{H}| + |\tilde{H}|\mathrm{rad}\mathbf{A} \leq \mathrm{rad}\mathbf{Q} \tag{24}$$

где знак неравенства понимается в поэлементном смысле, то

$$\tilde{H} \subseteq \Sigma_{\forall\exists}(\mathbf{A},\mathbf{Q}).$$

3. Числовой пример

Рассмотрим интервально-заданную систему с запаздыванием для $n = 3$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = [0; 0.01]x_1(t) + x_2(t) + [-0.01; 0.01]x_2(t-\tau); \\ \dot{x}_2(t) = [-1; -0.9]x_1(t) - x_2(t) + [-0.1; 0]x_3(t) + [0; 0.05]x_1(t-\tau); \\ \dot{x}_3(t) = [0; 0.1]x_2(t) - x_3(t) + [0.1; 0.2] - [0.2; 0.4]x_3(t-\tau); \end{cases}$$

$$x_i(\theta) = \varphi_{i_{t_0 \tau}}(\theta),\ \theta \in [t_0 - \tau, t_0],\ 1 \le i \le n.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0; 0.1] & 1 & 0 \\ [-1; -0.9] & -1 & [-0.1; 0] \\ 0 & [0; 0.1] & -1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & [-0.01; 0.01] & 0 \\ [0; 0.05] & 0 & 0 \\ 0 & [0.1; 0.2] & [-0.4; -0.2] \end{pmatrix}.$$

Интервальная положительно-определенная матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} [0.6; -1.4] & [-0.2; 0.2] & [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] & [0.9; 1.1] & [-0.2; 0.2] \\ [-0.2; 0.2] & [-0.2; 0.2] & [0.9; 1.1] \end{pmatrix} \tag{26}$$

имеет в качестве средней матрицы единичную, т. е.

$$\mathrm{mid}\mathbf{Q} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а решение “среднего” уравнения Ляпунова (23) для

$$\mathrm{mid}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 1 & 0 \\ -0.95 & -1 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & -1 \end{pmatrix}$$

и $\mathrm{mid}\mathbf{Q} = E$ имеет вид:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1.638414 & 0.612548 & -0.011319 \\ 0.612548 & 1.111502 & -0.020921 \\ -0.011319 & -0.020921 & 0.501046 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

которое удовлетворяет матричному неравенству (24), так как

$$\mathrm{rad}\mathbf{A}^T|\tilde{H}| + |\tilde{H}|\mathrm{rad}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2250962 & 0.08676845 & 0.0322394 \\ 0.08676845 & 0.0020921 & 0.0806274 \\ 0.322394 & 0.0806274 & 0.0020921 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathrm{rad}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rad}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица (27) является положительно-определенной, следовательно рассматриваемая интервальная матрица (25) является асимптотически устойчивой, как и следует из [10]. Матрицу D определим из условия отрицательной определенности матрицы (14), имеем

$$\mathbf{A}_1^T \tilde{H} = \begin{pmatrix} [0.000000000; 0.030627300] & [0.000000000; 0.055575100] \\ [-0.018647940; -0.017516040] & [-0.010309660; -0.008217560] \\ [0.002263800; 0.004527600] & [0.004184200; 0.008368400] \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} [-0.001046050; 0.000000000] \\ [0.050217790; 0.100322390] \\ [-0.200418400; -0.100209200] \end{matrix}\right),$$

$$\tilde{H}\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} [0.000000000; 0.030627300] & [-0.018647940; -0.017516040] & [0.002263800; 0.004527600] \\ [0.000000000; 0.055575100] & [-0.010309660; -0.008217560] & [0.004184200; 0.008368400] \\ [-0.001046050; 0.000000000] & [0.050217790; 0.100322390] & [-0.200418400; -0.100209200] \end{pmatrix}.$$

Округляя полученные результаты до 3-го знака, запишем интервальную матрицу $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [-1.225; -0.775] + d_1 & [-0.087; 0.087] & [-0.032; 0.032] & [0.000; 0.031] & [-0.019; -0.018] & [0.002; 0.005] \\ [-0.087; 0.087] & [-1.002; -0.998] + d_2 & [-0.081; 0.081] & [0.000; 0.056] & [-0.010; -0.008] & [0.004; 0.008] \\ [-0.032; 0.032] & [-0.081; 0.081] & [-1.002; -0.998] + d_3 & [-0.001; 0.000] & [0.050; 0.100] & [-0.200; -0.100] \\ [0.000; 0.031] & [0.000; 0.056] & [-0.001; 0.000] & -d_1 & 0 & 0 \\ [-0.019; -0.018] & [-0.010; -0.008] & [0.050; 0.100] & 0 & -d_2 & 0 \\ [0.002; 0.005] & [0.004; 0.008] & [-0.200; -0.100] & 0 & 0 & -d_3 \end{pmatrix},$$

где $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{C}}^T$, $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{C}}^T$. Легко видеть, что выбор $d_1 = 0.1 > 0$, $d_2 = 0.2 > 0$ и $d_3 = 0.3 > 0$ превращает интервальную матрицу $\mathbf{C}$ в отрицательно-определенную. Последнее означает что, интервально-заданная система (1) с запаздыванием является асимптотически устойчивой.

Заключение

Таким образом, применение функционала Ляпунова-Красовского к решению задачи исследования асимптотической устойчивости интервально-заданных систем с запаздывающим аргументом позволяет получить достаточные условия асимптотической устойчивости указанного класса систем.

Литература

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[2] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.

[3] Разумихин Б. С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 108.с.

[4] Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. bf 14, № 11. С. 2086–2088.

[5] Харитонов В. Л. Проблема Рауса-Гурвица для семейств полиномов и квазиполиномов. Математическая физика. 1979. № 26. С. 69–79.

[6] Харитонов В. Л. Семейства устойчивых квазиполиномов // Автоматика и Телемеханика. 1991. № 7. С. 75–88.

[7] Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука. Сиб.отд-ние, 1981.

[8] Barmish B. R., Hollot C. V. Counter-example to a recent on the stability of interval matrices by Bialas // Int. J. Contr. 1984. Vol. 39, № 5.

[9] Bialas S. A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Contr. 1983. Vol. 37, № 4.

[10] Dugarova I. V. An algorithm of interval matrix asymptotic stability testing // Interval computations. 1992. № 3(5). P. 56–62.

[11] Faedo S. Ann. Scuola norm. super. Pisa sci fis e math. 1953. Vol. 7, № 1-2.

[12] Jansson C. Interval Linear Systems with Symmetric Matrices, Skew-Symmetric Matrices and Dependencies in the Right Hand Side. Computing 46, Hamburg-Harburg, 1990.

[13] Karl W. C., Greschak J. P., Vergese G. C. Comments on 'A necessary and sufficient condition for stability of interval matrices // Int. J. Contr. 1984. Vol. 39, № 4.

[14] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[15] Rohn J. An Algorithm for Checking Stability of Symmetric Inreval Matrices. IEEE Transactions on Automatic Control. 1996. Vol. XX, No. V.

[16] Shary S. P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulations. 1995. Vol. 39. 53-85.

[17] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetics // Reliable Computing. 1996. Vol. 2, No. 1. P. 3–33.