

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЁННОГО ТЕПЛООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СТРУИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ПРЯОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ С УЧЁТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЁ ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ

Г.В.КУЗНЕЦОВ, А.В.КРАЙНОВ

*НИИ прикладной математики и механики при Томском госуниверситете, Томск, Россия*  
e-mail: Triangle@beep.ru

The process heat and mass transfer is investigated (studied) at motion of a tenacious incompressible nonisothermal liquid in a cavity in view of its(her) crystallization. The problem is resolved in conjugate statement. The distributions of a flow function and vortex, field of speeds, temperature fields for both phases, contours of layers of a crystallizing liquid are obtained.

## 1. Введение

Устойчивый интерес к исследованию конвективных течений в полостях различных типов наблюдается на протяжении последних сорока лет. Совершенно очевидно, что этот интерес объясняется широким прикладным значением проблемы: полости в качестве теплопередающих, теплоизолирующих и технологических элементов встречаются в энергетических и технологических установках различного назначения, радиоэлектронных устройствах и теплообменной аппаратуре [1, 2].

Процессы, связанные с изменением фазового состояния при затвердевании вещества, широко используются в металлургии, материаловедении, в химической технологии и лежат в основе получения современных кристаллов, глубокой очистки веществ, легирования с программным изменением состава, используются при сварке и резке металла, при выращивании композитов, при затвердевании отливок, при литье слитков, при сверхбыстрой кристаллизации закалкой из жидкого состояния и т.д. [2-6].

Исследования теплообмена и структуры течения при взаимодействии струи жидкости с ограниченным объёмом в условиях изменения её фазового состояния имеют важное научно-практическое значение в связи с тем, что подобные процессы широко представлены в технологических циклах различного уровня сложности таких отраслей промышленности как металлургическая, энергетическая и многих других [2,7,8].

Моделирование теплообмена при движении вязкой жидкости в полости прямоугольного вида сопряжено с решением достаточно сложных задач вынужденной конвекции несжимаемой жидкости. Поскольку создание надёжных аналитических методов расчёта параметров течения жидкости в ограниченных объёмах различного типа исключено из-за сложности таких течений, то возникает необходимость численного моделирования.

## 2. Постановка задачи

В данной работе рассматривается нестационарное взаимодействие дозвуковой ламинарной вязкой струи несжимаемой неизотермической жидкости с прямоугольной полостью открытого типа (рис.1). Цель данной работы – исследовать гидродинамику и сопряжённый теплообмен при движении вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в прямоугольной полости в условиях вынужденной конвекции.

Изучение описанного процесса проводилось с использованием математической модели на основе системы уравнений Навье – Стокса в переменных вихрь - функция тока при умеренных числах Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 800$ , уравнения энергии, уравнения теплопроводности для материала полости с соответствующими начальными и граничными условиями

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}} \quad (1.4)$$

Численное решение гидродинамической задачи осуществлялось в области, ограниченной участком затекания и выхода, линией симметрии, боковой стенкой и дном полости (рис.1).

На дне полости выставляется условие непротекания, прилипания, условие четвертого рода для уравнения энергии

$$\psi = 0; \quad \omega = 2 \cdot \psi(x, y + \Delta y) / (\Delta y)^2; \quad (1.5)$$

$$\theta_1 = \theta, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (1.6)$$

Аналогичные условия выставляются на боковой стенке полости

$$\psi = 0; \quad \omega = 2 \cdot \psi(x + \Delta x, y) / (\Delta x)^2; \quad (1.7)$$

$$\theta_1 = \theta, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (1.8)$$

На оси симметрии струи заданы условия неразрывности тепловых потоков и непротекания

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad \omega = 0; \quad (1.9)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (1.10)$$

Для составляющих скорости на участке выхода из полости использовалось условие „сноса”

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0;$$

для температуры „мягкое” граничное условие [9,10]. Условия теплоизоляции задаются на внешних границах полости

$$y = H, \quad 0 < x < D: \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0; \quad (1.11)$$

$$y = 0, \quad 0 < x < 1: \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0; \quad (1.12)$$

$$x = 0, \quad 0 < y < H: \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0; \quad (1.13)$$

$$x = 1, \quad 0 < y < S: \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0. \quad (1.14)$$

Начальные условия заданы в виде:

$$\psi(x, y, 0) = \psi^0(x, y); \quad \theta(x, y, 0) = \theta^0(x, y) \quad (1.15)$$

При затекании жидкости в полость, как уже упоминалось, выделяется два участка – участок входа 1 и участок выхода 9 (рис.1). При исследовании данного процесса необходимо выполнение следующего

интегрального соотношения, определяющего расход жидкости, являющегося основной интегральной характеристикой течения:

$$\int_{x_2}^{x_0} \mathbf{V}_+(x, y) dx = \int_{x_0}^{x_1} \mathbf{V}_-(x, y) dx$$

где  $x_1$  - фиксированная крайняя точка входного участка, лежащая на оси симметрии;  $x_0$  - координата точки раздела между участками с разным направлением движения жидкости в полости ( $x_2 < x_0 < x_1$ );  $x_2$  - координата фиксированной крайней точки выходного участка, лежащей на боковой стенке полости;  $\mathbf{V}_-(x, y)$  - поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от входного участка до дна полости;  $\mathbf{V}_+(x, y)$  - поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от дна полости до участка выхода.

При исследовании движения жидкости в полости с учётом процесса кристаллизации определяется нестационарное двумерное температурное поле, с помощью которого при использовании условия  $\theta \leq \theta_{кр}$  определяется фронт кристаллизовавшейся жидкости. В соответствии со спецификой изучаемого процесса граничные условия примут следующий вид:

а) на границе раздела между твёрдой и жидкой фазами в направлении оси  $x$  выставляется граничное условие четвёртого рода для уравнения энергии, где вводится тепловой эффект кристаллизации  $Q$

$$\theta = \theta_1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \left[ \frac{Q \rho v}{\lambda(T_{кр} - T_1^0)} + \text{Pr} \right] \frac{dy}{d\tau} \quad (1.16)$$

б) на границе раздела между твёрдой и жидкой фазами в направлении оси  $y$  выставляется также граничное условие четвёртого рода для уравнения энергии с аналогично введённым членом, как в (1.16)

$$\theta = \theta_1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \left[ \frac{Q \rho v}{\lambda(T_{кр} - T_1^0)} + \text{Pr} \right] \frac{dx}{d\tau} \quad (1.17)$$

Интегральное соотношение, определяющее расход жидкости, примет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathbf{V}_-(x, y) dx = \int_{x_2}^{x_0} \mathbf{V}_+(x, y) dx - W_1', \quad \text{где}$$

$$W_1' = \int_{x_3}^{x_2} \mathbf{V}_+(x, y) dx,$$

где  $x_1$  - координата фиксированной крайней точки входного участка, лежащей на оси симметрии,  $x_0$  - координата точки раздела между участками с разным направлением движения жидкости в полости,  $x_2$  - координата точки раздела между участком, на котором происходит кристаллизация расплава и участком, на котором расплав находится в жидком состоянии,  $x_3$  - координата фиксированной крайней точки выходного участка, лежащей на боковой стенке полости,  $W_1'$  - величина, отвечающая за расход жидкости, подверженной

кристаллизации.

Методом конечных разностей решены система уравнений Навье-Стокса в переменных функция тока-вихрь, уравнение энергии и уравнение теплопроводности для (1.1)-(1.17). Разностные аналоги уравнений переноса и теплопроводности решены методом прогонки [11,12]. Уравнение Пуассона на каждом временном слое решалось методом последовательной верхней релаксации. Граница затвердевания определялась с помощью критериального условия фазовых переходов. При несовпадении криволинейной границы в условиях изменения фазового состояния жидкости с узлами сетки применялись разности с переменными шагами по координатам. Использовалась разностная схема второго порядка точности. Были использованы равномерные и неравномерные разностные сетки. Значения вихря на границе области, а также на подвижной её части, определялись из уравнения для функции тока.

### 3. Тестовые задачи

Для проверки аппроксимации и сходимости численного решения в качестве тестовой была взята задача о плоском течении в прямоугольной каверне с верхней стенкой, движущейся в своей плоскости с постоянной скоростью [9-12].

Сравнение результатов по профилям продольной  $U(y)$  и поперечной  $V(y)$  составляющих скорости с данными других авторов [9-11] показало хорошее, в пределах  $\pm 7\%$ , согласование, а также по значениям функции тока при различных числах Рейнольдса  $300 \leq Re \leq 1000$  и различном количестве узлов разностной сетки  $20 \leq n_1 \leq 60$ ,  $17 \leq m_1 \leq 60$ , где  $n_1$ ,  $m_1$  – количество узлов сетки по координатам  $x$ ,  $y$  соответственно. В качестве второй тестовой была решена задача о сдвиговом течении с циркуляцией при малых числах Рейнольдса  $10 \leq Re \leq 50$  [13]. Сравнение результатов по профилям функции тока в различных сечениях с данными, полученными в монографии [13], показало хорошее, в пределах  $\pm 5\%$ , согласование.

### 4. Обсуждение полученных результатов

В ходе проведения научно-исследовательской работы рассматривалась жидкость разных типов (например, вода, расплавленный свинец, жидкая сталь) с широким диапазоном изменения динамического параметра  $Re$  и параметров модели. В данной работе приведены типичные результаты численных исследований для жидкой стали.

Как следует из анализа гидродинамической картины течения, которая была получена для различных вариантов геометрических характеристик полости (в частности, для  $\frac{L}{H} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ ) при достаточно

широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса  $100 \leq Re \leq 500$ , жидкость доходит до дна выемки, разворачивается и вытекает на всём участке 9 (рис.1). Исходя из этого при исследовании процесса движения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в полости можно выделить два этапа. К первому этапу можно отнести прохождение жидкости от входного участка до дна полости с учётом взаимодействия с ним. Второй этап движения жидкости проходит от дна полости до выходного участка, образуя область возвратного течения.

На рис.2 представлены изолинии продольной составляющей скорости в фиксированный момент времени при числе  $Re=200$  и геометрическом отношении сторон полости  $\frac{L}{H} = \frac{1}{2}$ . При увеличении числа Рейнольдса характер поведения продольной составляющей скорости в различных сечениях полости качественно сохраняется.

На рис.3 показано распределение поперечной составляющей скорости  $v(x,y)$  в фиксированный момент времени при числе  $Re=200$ . Анализируя распределения поперечной составляющей скорости, нужно отметить, что с увеличением числа Рейнольдса профиль  $v(x,y)$  в начальных сечениях полости становится более заполненным и близким к постоянному значению, в то время как при числах Рейнольдса  $Re=100, 200$  профили поперечной составляющей имеют почти параболическое распределение в тех же сечениях. Анализ распределения поперечной составляющей скорости показывает, что в поле течения формируется два максимума, соответствующих прямому и возвратному течению.

На рис.2, 3 можно заметить, что на 1 этапе по мере продвижения жидкости к основанию выемки поперечная составляющая скорости падает при возрастании продольной составляющей. На 2 этапе по мере продвижения жидкости к выходному участку продольная составляющая скорости падает, а поперечная составляющая скорости начинает расти.

При исследовании движения вязкой несжимаемой жидкости в полости прямоугольного типа был изучен процесс её кристаллизации. На рис.4 приведены контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени  $2.5 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.25 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.75 \cdot 10^{-4}$  при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0.979$ . Как видно из рисунка изменение толщины контура кристаллизовавшейся жидкости в пристенной области  $0.25 < x < 0.50$ ,  $0.25 < y < 0.32$  происходит достаточно плавно в сторону её увеличения по всей длине донной части полости. При обращении потока на втором этапе течения картина образования контура кристаллизовавшейся жидкости несколько изменяется. В пристенной области по высоте полости  $0.25 < x < 0.31$ ,  $0.25 < y < 0.45$  изменение толщины контура происходит более интенсивно. Особенно это хорошо заметно, если обратить внимание на кривые 2, 3, которые определяют контур кристаллизовавшейся жидкости в момент времени  $3.25 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.75 \cdot 10^{-4}$ .

На рис.5 представлены контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени  $3.125 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.6 \cdot 10^{-4}$ ,  $4.1 \cdot 10^{-4}$  при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0.979$ . Сравнивая рисунки 4, 5 можно заметить, что варьирование параметра загрузки струи не приводит к существенному изменению качественной стороны контура. В пристенной области по длине полости  $0.25 < x < 0.50$ ,  $0.25 < y < 0.31$  и по высоте  $0.25 < x < 0.32$ ,  $0.25 < y < 0.45$  изменение толщины кристаллизовавшегося слоя происходит несколько интенсивнее, чем на рис.4 (кривые 2, 3).

На рис.6 представлены профили температуры в фиксированный момент времени в сечениях  $y$  по координате  $x$  при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0.979$ : 1- $y=0.496$ ; 2- $y=0.554$ ; 3-  $y=0.598$ . Как видно из рисунка температурный профиль до твёрдой фазы (кривые 1, 2, 3) достаточно резко убывает. На границе раздела твёрдой и жидкой фаз возникают некоторые локальные максимумы температуры. Это можно объяснить тепловым эффектом кристаллизации, за счёт которого на границе раздела твёрдой и жидкой фаз наблюдаются локальные максимумы температуры. В твёрдой фазе скорость перестройки температурных полей меньше, чем в жидкой фазе.

## 5. Заключение

Результаты численного анализа позволяют сделать вывод о возможности дальнейшего расширения области применения математического аппарата [10,11] для решения задач о конвективных течениях в полостях открытого типа в условиях струйного затекания и сопряжённого теплообмена. Данная работа является логическим продолжением трудов [11,12], в которых была впервые показана возможность применения математического аппарата [10] для решения задач в сопряжённой постановке для областей с более сложной геометрией, чем канал или обтекаемое тело [14]. В дальнейшем получить устойчивые решения задач для областей со значительно более сложной геометрией, чем рассмотренные в [10-12] и в данной работе, позволит оптимизация сеточных параметров в связи с расширением возможностей современных ЭВМ.

## Литература

- [1] Махнова Г.В., Рис В.В., Смирнов Е.М. Двумерная ламинарная свободная конвекция в полости, имеющей форму квадрата со скругленными углами// Тр. Второй Рос. нац. конф. по теплообмену: Свободная конвекция. Теплообмен при химических превращениях. М.: МЭИ, Т.3, 1998, 100-103
- [2] Флеминг М. Процессы затвердевания. М.: Мир, 1977.
- [3] Скрипов В.П., Коверда В.П. Спонтанная кристаллизация переохлаждённых жидкостей. М.: Наука, 1984.
- [4] Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. М.: Мир, 1978.
- [5] Быстрозакалённые металлические сплавы/ Под ред. С.Штиба и Г.Верлимонта. М.: Металлургия, 1989.
- [6] Батышев А.И. Кристаллизация металлов и сплавов под давлением. М.: Металлургия, 1990.
- [7] Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука, 1985.
- [8] Карножицкий В.Н. Контактный теплообмен в процессах литья. Киев: Наук.думка, 1978.
- [9] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
- [10] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
- [11] Полежаев В.И., Бунэ А.В., Дубовик К.Г. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987.
- [12] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут.ун-та, 1990.
- [13] Ши Д. Численные методы для решения задач теплообмена. М.: Наука, 1988.
- [14] Гришин А.М., Зинченко В.И. Сопряжённый теплообмен между реакционно способным телом и газом при наличии неравновесных химических реакций// Изв. АН СССР, МЖГ, №2, 1974, 121-128

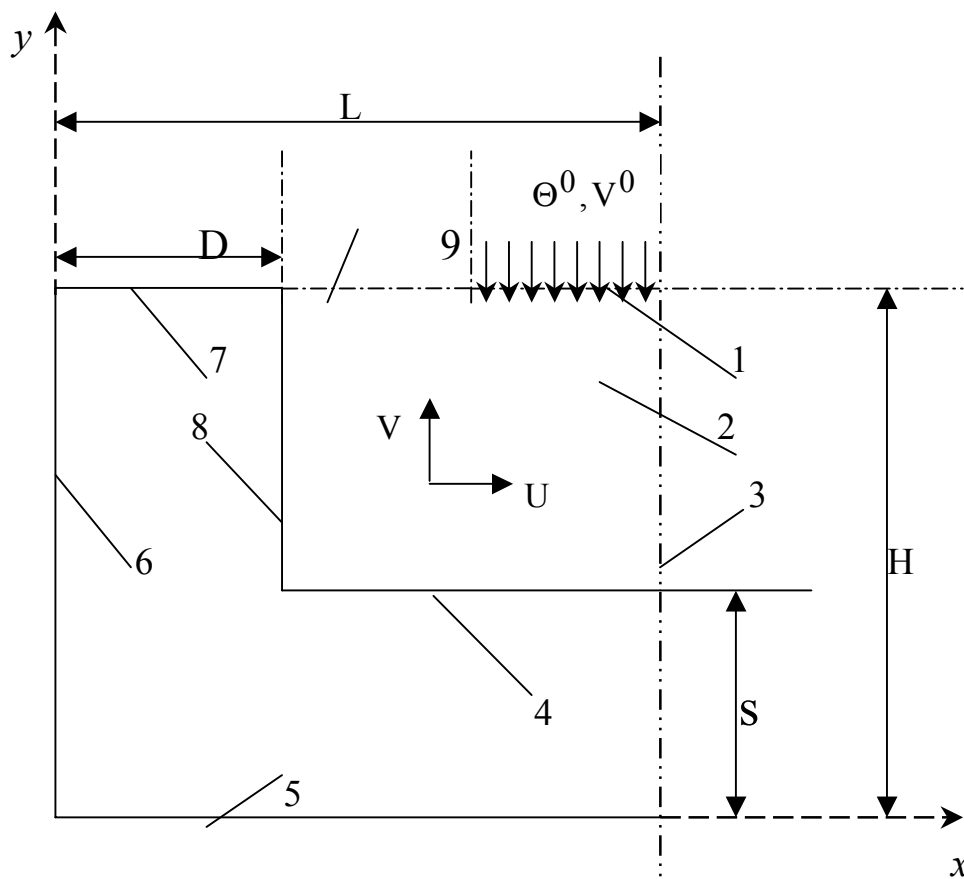


Рис.1. Общая схема течения в прямоугольной полости и геометрия расчётной области: 1 - участок входа в полость; 2 - гидродинамическая область; 3 - ось симметрии; 4 - дно полости; 5, 6, 7 - внешние стенки полости; 8 - боковая стенка полости; 9 - участок выхода из полости.

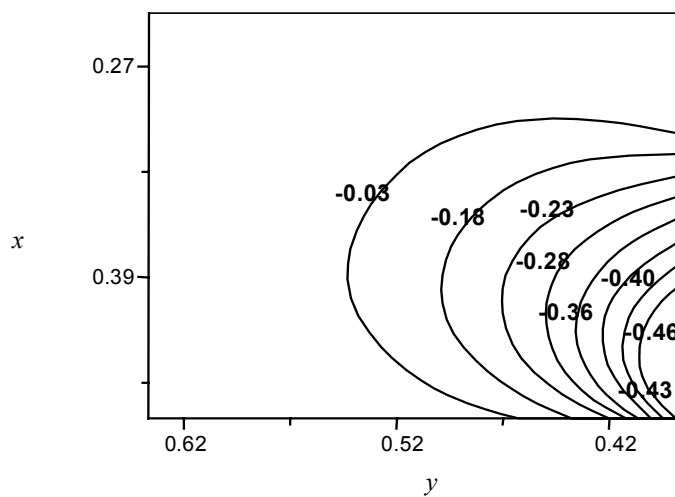


Рис.2. Изолинии продольной составляющей скорости в фиксированный момент времени при числе  $Re=200$  и

геометрическом отношении сторон полости  $\frac{L}{H} = \frac{2}{3}$ .

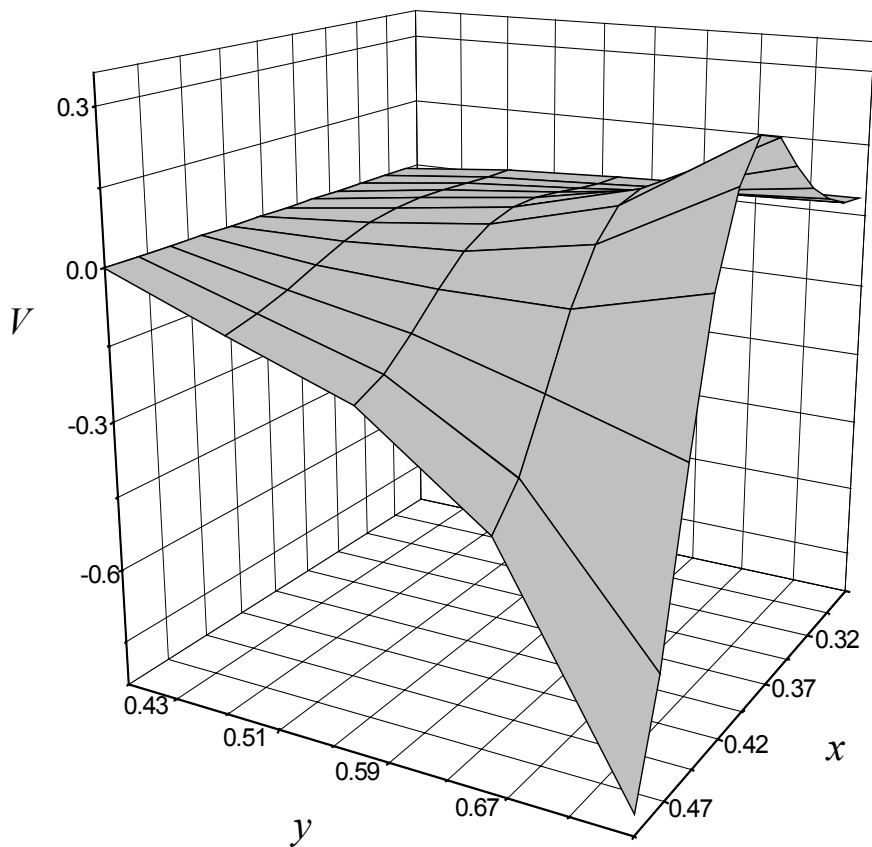


Рис.3. Распределение поперечной составляющей скорости на плоскости  $x, y$  в фиксированный момент времени при числе  $Re=200$ .

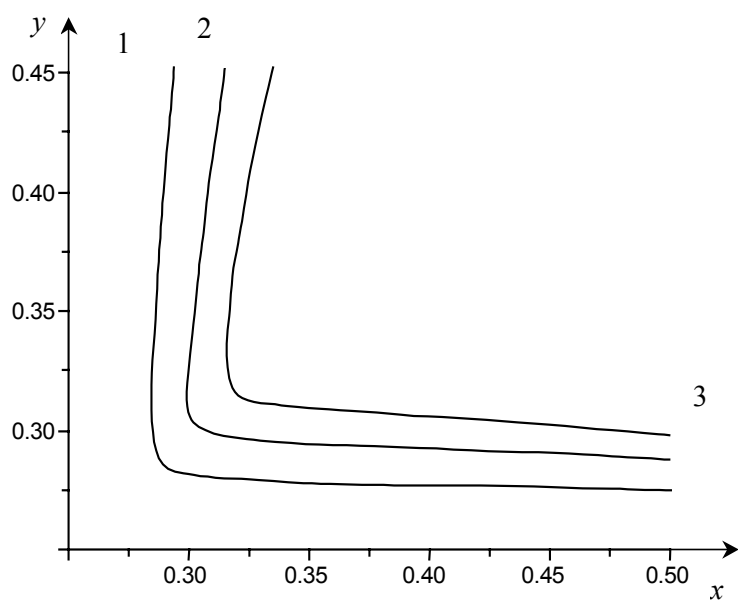


Рис.4. Контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени

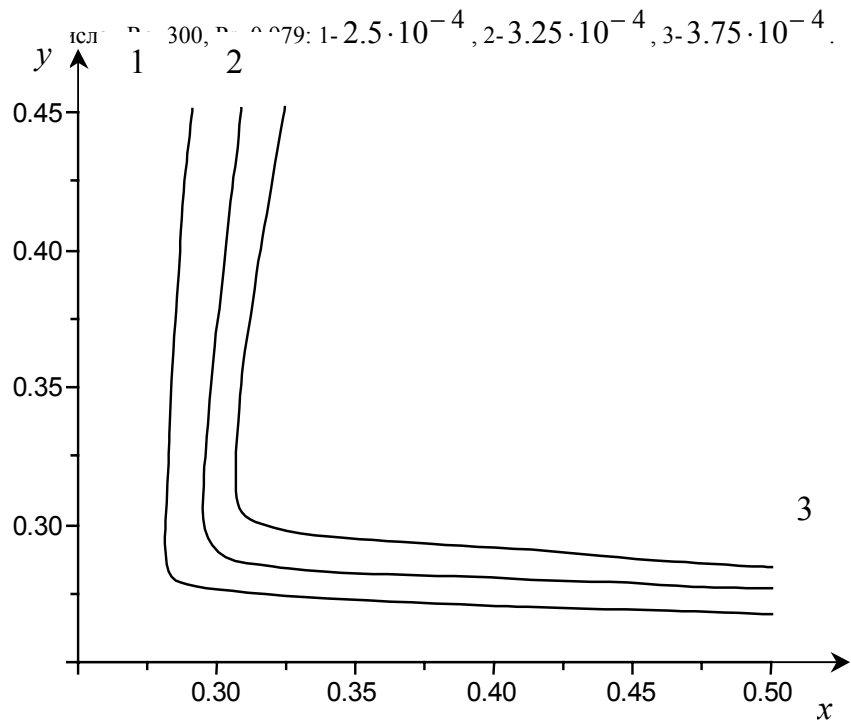
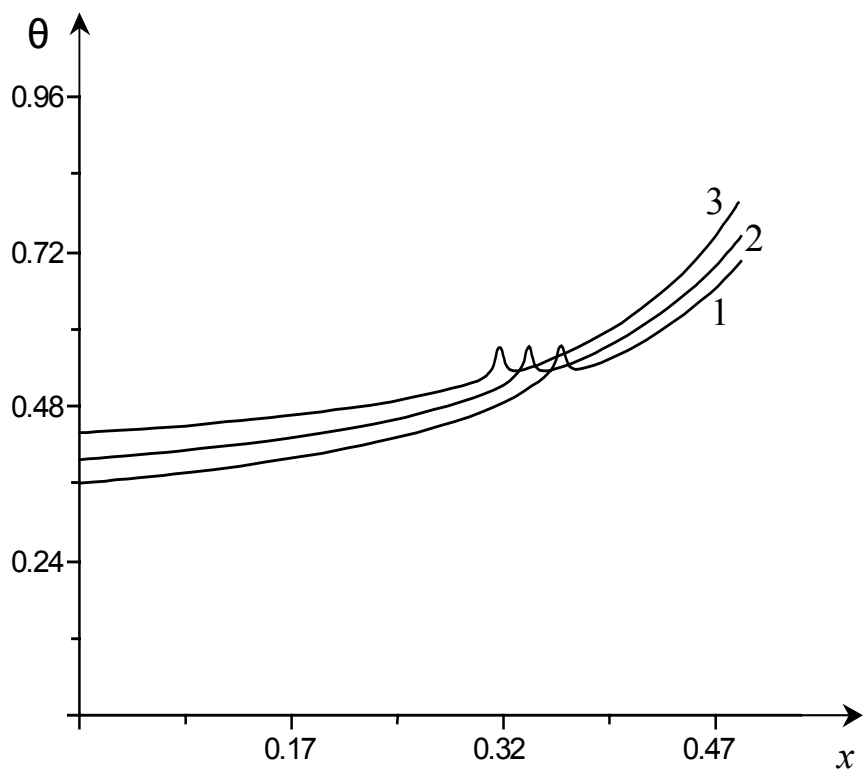
Рис.5. Контуры кристаллизовавшейся жидкости в различные моменты времени при числах  $Re=500$ ,  $Pr=0.979$ : 1-3.125 · 10<sup>-4</sup>; 2-3.6 · 10<sup>-4</sup>; 3-4.1 · 10<sup>-4</sup>.



Рис.6. Распределения температуры в твёрдой и жидкой фазах в условиях кристаллизации в различных сечениях  $y$  по координате  $x$  в фиксированный момент времени при числах  $Re=300$ ,  $Pr=0.979$ : 1 -  $y=0.496$ ; 2 -  $y=0.554$ ; 3 -  $y=0.598$ .