В последние годы среди фундаментальных задач механики и физики деформируемых тел на первое место вышла проблема определяющих соотношений. Как известно, анализ физико-механических явлений может основываться на совместном рассмотрении и решении ряда уравнений, отражающих определенные законы. Эта совокупность уравнений подразделяется на две различные группы. Первая из них представляет закономерности, вытекающие из общих принципов сохранения и термодинамики. Таковыми являются уравнения, выражающие принципы сохранения массы, импульса, энергии и энтропии. Балансовый вид этих уравнений универсален и таким образом, вид всех уравнений этой группы известен, и для любого материала они могут быть записаны. Вторая группа уравнений представляет собой именно определяющие соотношения. Эти уравнения описывают поведение определенного класса материалов. Они дополняют вышеупомянутую систему законов сохранения до замкнутой системы, задавая конкретные свойства материала. Эти уравнения выражают связь между кинематическими и динамическими характеристиками деформирования данного тела в данных условиях. Универсального алгоритма установления формы этих связей для каждого конкретного класса материалов нет. Для традиционных конструкционных материалов и обычных условий их работы на основе длительного опыта такие соотношения найдены практически.

Недавно произошел технологический взрыв, который привел к большому количеству новых, синтетических материалов. Эти материалы открывают новые возможности благодаря своим необычным физико-механическим свойствам. Нетрадиционные свойства обусловлены неоднородностью структуры этих материалов. Необычность влияния неоднородности структуры, как показывают эксперименты, состоит, например, в том, что в важнейшем для техники диапазоне малых деформаций, при которых сохраняются эксплуатационные свойства, поведение этих материалов может качественно отличаться от всех известных законов поведения, в частности, от линейного поведения.

С другой стороны непосредственные и, как казалось, ясные обобщения известных уравнений поведения могут приводить к несостоятельности теории, к физико-математической противоречивости и некорректности поставленных задач.

В этих условиях стала понятной необходимость фундаментальных исследований влияния общих физико-математических требований на форму определяющих соотношений сложных сред. Эти требования по сути являются концентрированным опытом предыдущих поколений исследователей.

Влияние неоднородности структуры феноменологически проявляется в сильной чувствительности материала к виду напряженного состояния. По сравнению с традиционными конструкционными материалами, у таких материалов, как конструкционные графиты, боропластики, полиамиды, эпоксиамины, эластомеры, тканевые стеклопластики, полиметилметакрилаты, полиэфиракрилаты, полистиролы, бетоны, горные породы, а также чугуны, алюминиевые и магниевые сплавы или даже углеродистые стали при низких температурах, эта зависимость деформационных свойств от отношений главных напряжений становится значительной настолько, что ее уже нельзя игнорировать даже в области малых деформаций.

Учет такого влияния неоднородности структуры с общефизической точки зрения, включающей соблюдение ковариантности, законов термодинамики и принципа макродетерменизма позволил получить определяющие соотношения связи напряжений с деформациями для рассматриваемого класса материалов. Для случая изотропного упругого тела они даются соотношениями [1, 2]

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \nu I_1 \sqrt{I_2} + \beta \frac{I_3}{\sqrt{I_2}} + \delta \frac{I_1 I_3}{I_2} + \ldots \qquad (1)$$

При этом классическая теория (первых два слагаемых в выражении для W) следует из данной как частный предельный случай. А именно, при отказе от учета влияния неоднородности структуры, т. е. при устремлении коэффициентов ν, β, δ, … к нулю получаем классический результат, а именно, закон Гука. Дополнительные к классическим слагаемые позволяют описать целый спектр нетривиальных эффектов, которые должны быть учтены или использованы в разнообразных приложениях этих материалов. Причем это описание новых эффектов является максимально точным, так как соотношения (1) аппроксимируют реальное поведение по сути суммами рядов Фурье или в предельном (классическом) случае – суммами рядов Тейлора, которые, как известно, обладают наилучшими свойствами аппроксимации. Это подтверждается также согласованностью теоретических предсказаний экспериментальным данным (рис. 1, 2) [3]. На рис. 1 даны расчетные и экспериментальные диаграммы деформирования графита, на рис. 2 – чугуна.

Однако одной лишь согласованности нелинейных определяющих соотношений с тем или иным, но всегда ограниченным набором экспериментальных данных, недостаточно для их применения при решении задач. Необходимо доказать теоремы единственности и устойчивости. Действительно, для краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j} + F_i = 0, && \sigma_{ij} n_j \big|_{S_T} = T_i \\
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), && u_i \big|_{S_U} = U_i \\
&\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, && u_i l_i \big|_{S_{TU}} = U_l, \;\; \varepsilon_{mjk}\left(\sigma_{js} n_s\right) \cdot l_k \big|_{S_{TU}} = T_m
\end{aligned} \qquad (2)$$

может быть разветвление решения, то есть по достижению некоторого напряженно-деформированного состояния два различных решения $\sigma_{ij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ и $\sigma_{ij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$ соответствуют одной и той же задаче (2).

Доказанная нами теорема единственности утверждает, что для того, чтобы решение было единственным необходимо и достаточно, чтобы постоянные материала удовлетворяли определенным неравенствам. Например, для случая первого приближения W, эти неравенства таковы

$$\mu > 0, \qquad \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \qquad \nu < \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\lambda + 2\mu - \left|\lambda - \frac{2}{3}\mu\right|\right) \tag{3}$$

Более того, эти неравенства (3) также являются необходимыми и достаточными условиями выполнимости постулата устойчивости материала. При его невыполнимости невозможно определить постоянные материала из макроэксперимента.

Анализ следствий теоремы единственности обнаруживает класс материалов, в которых влияние неоднородности структуры на их поведение достигает максимума. К этому классу принадлежат, например, сыпучие гранулированные материалы, песок, порошки. Для таких материалов область допустимых отношений главных напряжений, при которых они являются сплошными, ограничена. Для них свободная энергия вырождена. В связи с этим были проведены исследования влияния такого общефизического требования, каковым является принцип сопряженности термодинамических потенциалов, на форму вырожденного потенциала напряжений. Результатом этого исследования явились определяющие соотношения с внутренними ограничениями, которые могут быть обусловлены наличием максимальной неоднородности структуры материала. Деформации в этих средах складываются из двух слагаемых, одно их которых имеет потенциалом дополнительную работу W^*, а второе – функцию внутреннего ограничения F, индуцируемого вырожденным потенциалом. Доказана теорема, согласно которой существует только одна тензорно-линейная модель с ограничениями [5, 6]. Ее определяющие соотношения таковы

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad W_1 = \frac{\lambda}{2}\left(I_1 - \kappa\sqrt{I_2}\right)^2, \qquad F \equiv \sigma - \frac{\frac{1}{3}\xi - \frac{1}{\kappa}}{\sqrt{0.5\left(3 - \xi^2\right)}}\tau = 0$$

$$\varepsilon_i = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_i^*} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^*}, \qquad W^* = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}}{2(1+\kappa^2)}\left(\sigma_1^* - \kappa\sigma_2^*\right) & при \;\; F = 0 \\ +\infty & при \;\; F \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Согласованность теории и эксперимента показана на примере поведения морского песка (рис. 3, 4) [3]. На рис. 3 даны расчетные и экспериментальные диаграммы деформирования, на рис. 4 – эволюция внутреннего ограничения. Здесь внутреннее ограничение по сути является поверхностью нагружения Мизеса-Шлейхера. Именно такая форма поверхности нагружения, предсказанная теорией, как известно, соответствует сыпучим материалам.

Приведенные результаты существенно расширяют модельную базу механики деформируемых тел и как всякий фундаментальный результат, они находят разнообразные приложения во многих областях. Они были использованы при решении задачи о концентрации напряжений у сферической полости в гетерогенно-упругой среде [7], в виброакустике усталостных трещин при разработке систем акустической томографии, в моделировании некоторых ударно-волновых технологий [8], возникновении ударных волн, новых фаз в микронеоднородных материалах, в задачах механики сыпучих материалов [9], в расчетах параметров процессов листовой штамповки. Достигнутый уровень может быть использован при учете влияния тепловых, электрических и магнитных полей на поведение данных материалов, а также при наличии анизотропии и больших деформаций и при моделировании зон фазовых переходов и фазовых превращений упругих тел при различных видах напряженного состояния.

Литература

1. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // ПММ. – 1993. – Т. 57. Вып. 5. – С. 153-159.
2. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // ДАН СССР. – 1992. – Т. 322. № 1. – С. 57-60.
3. Мясников В.П., Олейников А.И. Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. – М.: 2000. – 200 с.
4. Олейников А. И., Могильников Е. В. О единственности решения задач и устойчивости материала нелинейной гетерогенной упругости // ДАН. РАН. 2001.
5. Мясников В.П., Олейников А.И. Деформационная модель идеально сыпучей зернистой среды. /ДАН СССР. 1991. Т.316. № 3. - С.565-568.
6. Олейников А.И. О модели разномодульной среды с ограничениями. /ДАН. 1994. Т.334. № 3. - С.314-316.
7. Олейников А.И. Напряженно-деформированное состояние разномодульной среды у сферической полости // ФТПРПИ. СО АН СССР. – 1988. – № 4. – С. 24-28.
8. Олейников А.И. О распространении волн малых возмущений в разномодульных статическим напряженных средах // ФТПРПИ. – 1989. – № 3. – С. 39-48.
9. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. – М.: Наука, 1988. – 144 с.