

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ПОКРЫТИЯМИ

А.И. ОЛЕЙНИКОВ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

А.О. КУЗЬМИН

Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, Россия

The technique of account of durability of materials with composite coverings based on criterion of durability and on a method of a boundary element for piecewise-homogeneous bodies is offered. The application of regularization methods for reception of the steady decision is described. The description of the program of calculation of materials with coverings with parallel performance of calculation on the several workstations is given.

При оценке запаса прочности композиций типа основа-покрытие обычно надо учитывать способ их соединения, например, напайка или сварочное соединение произвольного исполнения. Для таких тел могут быть характерными тонкие неоднородные межфазные слои и различного рода нарушения межфазной структуры, обусловленные особенностями технологического характера с интенсивными физико-химическими процессами на границе раздела фаз. При рассмотрении задач контактного взаимодействия таких структур необходимо учитывать эти отклонения от идеального контакта, которые приводят к нарушению условий непрерывности векторов перемещений и напряжений при переходе через межфазную область.

К настоящему времени выявлены критерии для сопоставления характеристик прочности материала при простейших нагружениях с его сопротивлением пластическому деформированию и растяжению в условиях действия сложной системы напряжений. Установлены также параметры напряжённого состояния, от условий которых зависит интенсивность процессов, обуславливающих исчерпание прочности материала. Учтены статистические аспекты прочности и особенности поведения материалов в условиях повышенных температур. Такие критерии практически верно отражают условия предельного состояния данных структур при сложном однородном напряжённом состоянии.

В реальных температурно-силовых режимах эксплуатации материалов с покрытиями в композиции может возникать существенно неоднородное сложное напряжённое состояние с большими градиентами напряжений. При этом расчёт прочности сопряжён с расчётом распределения компонент тензора напряжений в исследуемых областях основы и покрытия.

При разработке методов и алгоритмов расчёта напряжённо-деформированного состояния тел с покрытиями обычно используется сведение задачи к исследованию деформации пластин (оболочек), лежащих на жёстком или линейно-деформируемом основании. Выбор же варианта механической модели для описания свойств покрытия (обычно, это пластины (оболочки) Кирхгофа-Лява или Рейсснера-Тимошенко и их модификации), оказывается, может существенно влиять на конечный результат. Это, в свою очередь, может приводить к некорректностям решения, искажающих истинную картину взаимодействия покрытия с основой и распределения в них напряжений. В связи с данной неадекватностью предлагаются различные уточнения классических прикладных теорий при описании свойств покрытия, которые могут быть эффективны при решении конкретных задач. Развитие этих уточнений на многослойные неоднородные покрытия или на реальные, более сложные, чем слой, полоса, сфера или цилиндр конструкции, наталкивается, как правило, на пока непреодолимые трудности. В то же время основным преимуществом уточнённых уравнений деформирования покрытия как тонкостенного упругого элемента считается их близость к уравнениям теории упругости в качественном и количественном отношении при решении данного класса задач.

Расчёт напряжённого состояния в основе и в многослойном неоднородном или композиционном покрытии может с самого начала осуществляться на основе уравнений теории упругости без использования прикладных теорий тонкостенных элементов.

Наличие больших градиентов напряжений в покрытии и основе для многих рабочих органов и узлов трения современных машин повышают привлекательность методов граничного элемента, в которых расчёт распределения напряжений основывается на точных аналитических решениях уравнений теории упругости [1, 2].

Предлагается методика расчёта прочности материалов с композиционным и многослойным покрытием при сложном напряжённом состоянии, основанная на критерии прочности и на непрямом методе граничного элемента для кусочно-однородных тел, в общем случае позволяющем рассчитывать тела с несколькими

произвольно расположенных областями с разными упругими постоянными ν и E , с учётом поведения межфазных областей и остаточных напряжений.

Задача теории упругости для материалов с покрытиями основывается на рассмотрении кусочно-однородного тела Ω , состоящего из однородных фаз Ω_n , так что $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ и $\Sigma_{n,m} = \Omega_n \cap \Omega_m$ - поверхность раздела фаз Ω_n и Ω_m , $n, m = 1, \dots, N$. Описание напряжённо-деформированного состояния тела Ω осуществляется вектором перемещения $\vec{U}(u, v)$, тензорами деформаций $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ и напряжений $\sigma = (\sigma_{ij})$ для каждой фазы.

Основными соотношениями при плоской деформации являются следующие уравнения равновесия фаз и выражения для деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(n)}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_x^{(n)} = \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(n)} = \frac{\partial v^{(n)}}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(n)}}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \frac{2G^{(n)}}{1-2\nu^{(n)}} \left[(1-\nu^{(n)})\varepsilon_x^{(n)} + \nu^{(n)}\varepsilon_y^{(n)} \right], \\ \sigma_y^{(n)} &= \frac{2G^{(n)}}{1-2\nu^{(n)}} \left[(1-\nu^{(n)})\varepsilon_y^{(n)} + \nu^{(n)}\varepsilon_x^{(n)} \right], \\ \sigma_{xy}^{(n)} &= 2G^{(n)}\varepsilon_{xy}^{(n)}, \quad \sigma_{zz}^{(n)} = \nu^{(n)}(\sigma_{xx}^{(n)} + \sigma_{yy}^{(n)}). \end{aligned} \quad (3)$$

В выражениях (2), (3) $u^{(n)}$, $v^{(n)}$ - перемещения соответственно по осям x и y прямоугольной декартовой системы координат с базисом $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y \right)$, $G^{(n)}$ и $\nu^{(n)}$ - модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала n -й фазы. Постановка задачи завершается формулировкой граничных условий на внешней поверхности тела $\partial\Omega$ и условий на поверхностях раздела $\Sigma_{n,m}$. Если смежные фазы работают совместно, то векторы перемещений и напряжений при переходе через поверхности раздела изменяются непрерывно и

$$\vec{U}^n = \vec{U}^m, \quad \vec{P}^n = \vec{P}^m \quad \text{на } \Sigma_{n,m}, \quad (4)$$

где $\vec{U} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$, $\vec{P} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y)\vec{e}_x + (\sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x)\vec{e}_y$, $\vec{n} = (n_x, n_y)$ - нормаль в точке поверхности $\Sigma_{n,m}$.

Фундаментальное решение $H_{ij,k}(Q, q_0)$, $I_{ik}(Q, q_0)$ задачи (1)-(3) в случае однородной бесконечной плоскости дано в [3], благодаря которому напряжения и деформации рассчитываются по формулам

$$\sigma_{ij}^{(n)}(Q) = \int_{\partial\Omega'^{(n)}} H_{ijk}^{(n)}(Q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl, \quad \varepsilon_{ij}^{(n)}(Q) = \int_{\partial\Omega'^{(n)}} I_{ik}^{(n)}(Q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl, \quad (5)$$

где $H_{ijk}^{(n)}(Q, q_0)$, $I_{ik}(Q, q_0)$ - функции влияния Грина ($i, j, k = x, y$), которые описывают напряжения и деформации во внутренней точке Q n -ой фазы ($Q \notin \partial\Omega^{(n)}, Q \notin \Sigma_{n,m}$), вызванные действием единичной силы, приложенной в точке q_0 граничного или контактного контура $\partial\Omega'^{(n)}$, $q_0 \in \partial\Omega'^{(n)}$, $\partial\Omega'^{(n)} = \partial\Omega^{(n)} + \Sigma_{n,m}^\pm$, $n, m = 1, 2, \dots, N$. При этом граничные элементы, расположенные на стороне $\Sigma_{n,m}^+$, обращённой к фазе $\Omega^{(n)}$, и на стороне $\Sigma_{n,m}^-$, обращённой к смежной фазе $\Omega^{(m)}$, одного и того же контакта

$\Sigma_{n,m}$ совпадают друг с другом. Функции $f_k^{(n)}(q_0)$, называемые фиктивными нагрузками, находятся из системы ($n, m = 1, \dots, N$) уравнений [4]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_k^{(n)}(q) + \int_{\partial\Omega^{(n)}} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} &= P_k^{(n)}(q), \\ \int_{\partial\Omega^{(n)}} I_{ik}^{(n)}(q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} &= u_k^{(n)}(q), \\ \frac{1}{2} f_k^{(n)}(q) + \int_{\Sigma_{n,m}^+} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} &= \\ = \frac{1}{2} f_k^{(m)}(q) + \int_{\Sigma_{n,m}^-} H_{ijk}^{(n)}(q, q_0) n_j(q) f_k^{(m)}(q_0) dl_{q_0}, \\ \int_{\Sigma_{n,m}^+} I_{ik}^{(n)}(q, q_0) f_k^{(n)}(q_0) dl_{q_0} &= \int_{\Sigma_{n,m}^-} I_{ik}^{(m)}(q, q_0) f_k^{(m)}(q_0) dl_{q_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Система интегральных уравнений (6) с использованием квадратурной формулы прямоугольников приводится к системе линейных алгебраических уравнений, которая, после умножения на транспонированную матрицу коэффициентов, может быть решена методом Зейделя [5].

При решении задач данным алгоритмом приходится иметь дело с плохо обусловленными системами линейных уравнений (вследствие использования при записи условий неразрывности интегральных уравнений первого рода)

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad m \geq n, \quad (7)$$

где b_i - наблюдаемые величины нагрузок, содержащие погрешность квадратичной формы δ , т.е. $\|b - \bar{b}\| \leq \delta$, здесь \bar{b} - точное значение нагрузок; a_{ij} - известные коэффициенты матрицы; x_j - искомые величины.

Поскольку обычно b_i заданы с погрешностью, то в общем случае система (7) несовместна, т.е. не имеет решения. В этом случае ищется квадратичное приближение к решению (7). Поскольку исходные данные (граничные нагрузки) изначально содержат ошибку, то существует множество решений, удовлетворяющих условию

$$\|Ax - b\|^2 \leq \delta^2. \quad (8)$$

При этом, вследствие неустойчивости задачи, среди этих решений могут быть такие, которые сколь угодно сильно отличаются от точного. Это обуславливает необходимость использования соответствующих методов решения некорректных задач. Фундаментальным приёмом решения таких систем уравнений является метод регуляризации А.Н. Тихонова [6].

Поскольку существует множество решений системы, которые удовлетворяют (8), необходимо из этого множества выбрать решение, отвечающее определённым требованиям. В этом состоит основная идея метода регуляризации. По Тихонову, данная задача сводится к минимизации сглаживающего параметрического функционала:

$$f(x) = M^\alpha [x, A] = \|Ax - b\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad (9)$$

где $\alpha = \alpha(\delta > 0)$ параметр регуляризации, согласованный с погрешностью входных данных δ .

Таким образом, исходная задача (7) заменена другой, близкой (при малых α) к ней задачей (9). При этом доказано, что решение (9) является регуляризующим, а, следовательно, устойчивым.

Изложим алгоритм решения задачи (9), реализованный в комплексе, который состоит из многократных формирований и решений систем линейных уравнений конечными методами. Алгоритм содержит внешний и внутренний циклы, которые обеспечивают выполнение условия, свидетельствующего о получении регуляризованного решения системы (7).

Внешний цикл: Здесь формируется сходящаяся к нулю последовательность $\{\alpha_p\}$, на элементах которой производится минимизация функционала (9). В качестве такой последовательности взята геометрическая

прогрессия $\alpha_{p+1} = \mu\alpha_p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, $\mu < 1$. После выбора очередного $\alpha = \alpha_p$ следует переход на внутренний цикл.

Внутренний цикл. Обеспечивает поиск минимума функционала (9) при закреплённой величине $\alpha = \alpha_p$. Можно показать, что минимум функционала при $\alpha = \alpha_p$ обеспечивает решение системы:

$$(AA^* + \alpha_p E)x = A^*b + \alpha_p,$$

где A^* транспонированная матрица A , E - единичная матрица.

После этого следует переход на внешний цикл и т.д.

В качестве критерия выбора регуляризованных приближений комплекс использует критерий Тихонова-Гласко [7], не требующего знания величины входной погрешности δ :

$$\alpha_{opt} = \min_p \max_j |x_j^{\alpha_{p+1}} - x_j^{\alpha_p}|.$$

В целях тестирования полученных алгоритмов была решена следующая задача для неоднородного тела.

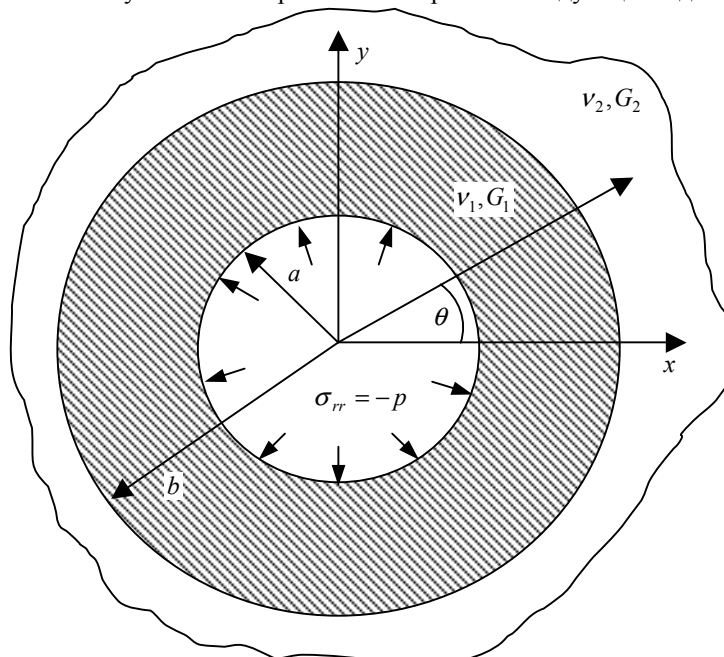


Рис. 1. Задача о напряжённом состоянии внутренней поверхности цилиндрического отверстия.

Рассматриваемая область (рис. 1) состоит из кольца $a \leq r \leq b$ с упругими постоянными ν_1 и G_1 внутри круглого отверстия радиуса $r = b$ в большой пластинке с упругими постоянными ν_2 и G_2 . Внутренняя поверхность кольца находится под действием нормальных напряжений $\sigma_{rr} = -p$, а пластинка свободна от напряжений на бесконечности.

Решение этой задачи определяется через радиальные и тангенциальные напряжения по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{1 - a^2/b^2} \left[(pa^2/b^2 - p') - (p - p')a^2/r^2 \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{1 - a^2/b^2} \left[(pa^2/b^2 - p') + (p - p')a^2/r^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p'b^2/r^2 \\ \sigma_{\theta\theta} &= +p'b^2/r^2 \end{aligned} \right\} \quad r \geq b,$$

где $p' = \frac{2(1 - \nu_1)pa^2/b^2}{2(1 - \nu_1) + (G_1/G_2 - 1)(1 - a^2/b^2)}$.

Численное решение этой задачи получено при следующих значениях параметров: $a/b = 1/2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $G_1 = 2000$, $G_2 = 1000$ и $|p| = 8$. Круговые границы $r = a$ и $r = b$ были разделены на 100 элементов каждая. Результаты вычислений сопоставляются с аналитическим решением, где сплошная линия – теоретическое решение, точки – численное (рис. 2).

При решении современных практических задач любыми распространёнными численными методами возникают достаточно большие системы уравнений, решение которых в приемлемые сроки часто не под силу любым современным персональным компьютерам. Это обусловлено прежде всего растущей сложностью решаемых задач. При моделировании тел с покрытиями описываемым комплексом программ возникла схожая проблема. Так, например, при решении некоторых задач, связанных с расчётом напряжённого состояния тел с покрытиями, системы линейных уравнений достигают 3000-4000 тысяч уравнений, что для обычного персонального компьютера часто не под силу. Решение же ещё более сложных задач на ПК становится просто невозможным. Это обусловило развитие комплекса ещё в одном направлении – модификация математического алгоритма и его программной реализации с целью вовлечения в вычислительный процесс не одного, а многих компьютеров (рабочих станций) (рис. 3), т.е. создание комплекса распределённых вычислений.

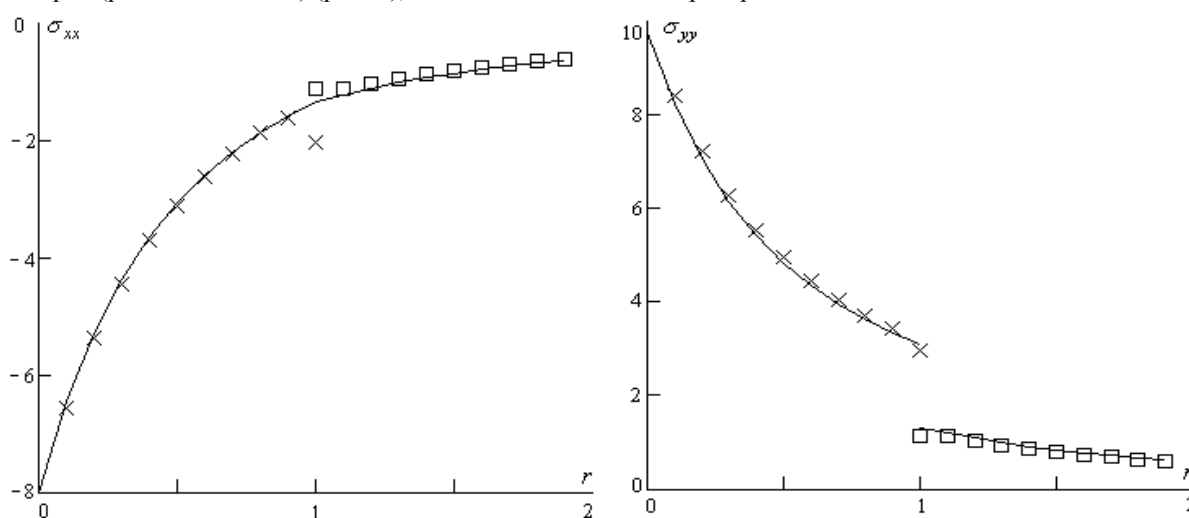


Рис. 2 Сравнение теоретических и числовых результатов.

Основную вычислительную сложность представляет решение системы линейных уравнений методом регуляризации, т.к. это связано с многократным формированием и решением систем конечными методами. При этом комплекс предлагает как распараллеливание математических алгоритмов, так и распределение отдельных независимых блоков всего алгоритма (при неэффективности математического распараллеливания) между несколькими машинами в сети.

Наконец, ввиду возрастающей потребности в наличии компьютерного обеспечения для проведения модельных расчётов и, в частности, расчёта напряжённого состояния материалов с разнообразными покрытиями, был создан единый комплекс программ, включающий перечисленные выше возможности. К числу положительных качеств комплекса можно отнести возможность автоматического задания задачи, одновременно с максимально детальным её описанием, построение цветных и чёрно-белых диаграмм напряжённого состояния, полную автоматизацию вычислительного процесса. Основная блок-схема и описание модулей комплекса представлены на рис. 3:

1. Интерфейс пользователя. Является графической программой для Windows и предназначен для ввода данных о задаче, управляющей информации и вывода результатов счёта.
2. Модуль GIF. Реализует сохранение диаграмм (цветных и чёрно-белых в виде изолиний) напряжённого состояния в графическом формате GIF.
3. Модуль связи. Является вспомогательным модулем, решающим ряд вспомогательных задач и облегчающем написание интерфейса пользователя.
4. Модуль управления входными данными. Реализует операции хранения и обработки входных расчётных данных конкретных вычислительных задач.
5. Модуль расчёта. Представляет собой три группы более мелких модулей:
 - серверная часть: реализует логику распределения вычислений на отдельные рабочие станции и является центральным хранилищем результатов счёта;

- клиентские части: тиражируются на отдельные рабочие станции и реализуют логику сетевого взаимодействия, управляют ресурсами машины и локальным расчётом;
- вычислительные модули: собственно реализуют численные алгоритмы и располагаются на отдельных рабочих станциях вместе с клиентскими частями.

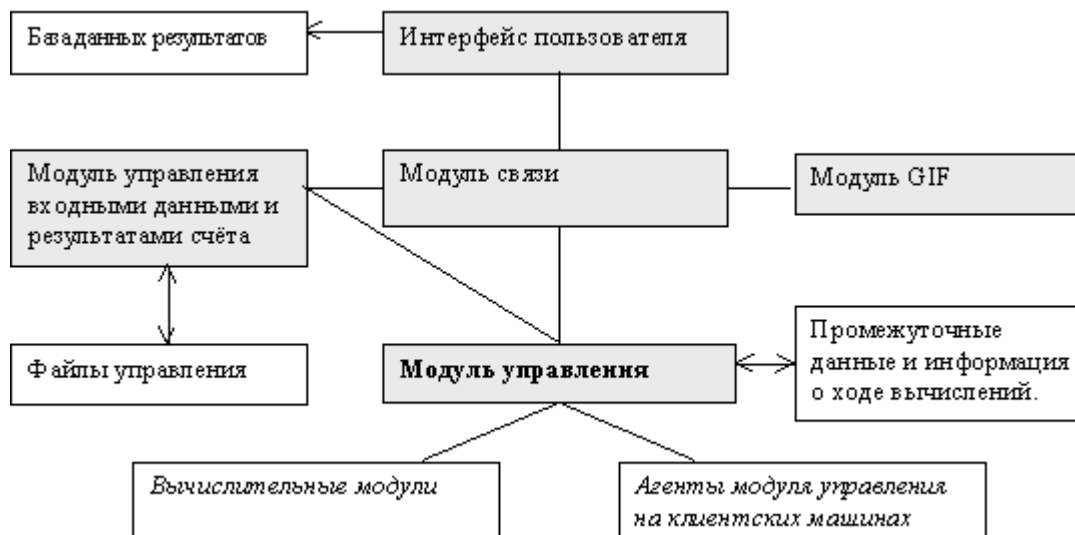


Рис. 3 Структура комплекса.

На рисунке серым цветом обозначены модули, выполняющиеся на главной рабочей станции, являющейся центром сбора данных и управления рабочими станциями, включёнными в расчёт. На последних выполняются модули, отмеченные на диаграмме курсивом.

Библиографический список

- [1] Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках: пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 494с., ил.
- [2] Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела: Пер. с англ. - М.: Мир, 1987. - 328 с., ил.
- [3] Ляв А. Математическая теория упругости. М: ОНТИ, 1935.
- [4] Олейников А.И., Кислая В.В., Грибанова Л.П. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения задач в горной механике. / В сб. Аналитические методы и применение ЭВМ в механике горных пород. Новосибирск: ИГД СО РАН АН СССР, 1982.
- [5] К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. М.:Физ.-мат. Лит., 1961, 524с.
- [6] Методы решения некорректных задач, А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1974.
- [7] Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Старостенко В.И. К., «Наук. думка», 1978. 228с.