ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛУНОРМ ВЕЙВЛЕТ РАЗЛОЖЕНИЯ

М. В. Никулин, В. В. Славский
Алтайский государственный университет, Россия

In operation the new method of build-up of prolongations of signals based on minimization of various Euclidean seminorms of wavelet-decomposition is offered. The algorithm is implemented in the system Matlab and is applicable for signals of arbitrary length and anyone wavelet.

Будем под сигналом понимать последовательность чисел $s = \{s_n\}_{n\in Z}$, где Z — множество всех целых чисел, $\|s\| = \sqrt{\sum_{n\in Z} |s_n|^2} < \infty$. Пространство всех таких последовательностей обозначим через $L^2(Z)$ и будем рассматривать как вещественное Гильбертово пространство. Элементы $e_i = \{\delta_{in}\}_{n\in Z}$ этого пространства образуют ортонормированный базис. Любой конечный набор чисел $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_N\}$ определяет отображение пространства $L^2(Z)$ в себя по формуле:

$$H(s) = \sum_{i=0}^{N} s_{n-i} h_i.$$

Отображение H называется фильтром конечной длины. Сопряженное отображение H^* также есть фильтр с коэффициентами $h^* = \{h_{-N}, h_{-N+1}, \ldots, h_0\}$. Если сопоставить последовательностям s и h их производящие функции

$$s = \{s_n\}_{n\in Z} \to s(z) = \sum_{n\in Z} s_n z^n, \quad h = \{h_i\}_{i=0,\ldots,N} \to h(z) = \sum_{i=0}^{N} h_i z^i,$$

то производящие функции для $H(s)$ и $H^*(s)$ равны:

$$H(s) \to s(z)\cdot h(z), \quad H^*(s) \to s(z)\cdot h(\frac{1}{z}).$$

Введем еще два отображения пространства $L^2(Z)$ в себя — прореживание и интерполяцию (downsampling, upsampling);

$$\downarrow: s(z) \to \frac{s(\sqrt{z}) + s(-\sqrt{z})}{2}, \quad \uparrow: s(z) \to s(z^2), \quad \uparrow\cdot\downarrow: s(z) \to \frac{s(z)+s(-z)}{2}.$$

Говорят, что два фильтра (низких и высоких частот) H и G составляют квадратурный зеркальный фильтр, если после разложения сигнала этими фильтрами, его можно полностью восстановить, так как это показано на рис. 1. В терминах производящих [1] функций это свойство эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{z}\right) g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) h(z) &= 2, \\ g\left(\frac{1}{z}\right) g(-z) + h\left(\frac{1}{z}\right) h(-z) &= 0. \end{aligned}$$

Подставив $z = e^{i\omega}$, получим эквивалентные равенства

$$\begin{aligned} |g(\omega)|^2 + |h(\omega)|^2 &= 2, \\ \overline{g(\omega)} g(\omega+\pi) + \overline{h(\omega)} h(\omega+\pi) &= 0. \end{aligned}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 99–01–00543, 00–15–96165).

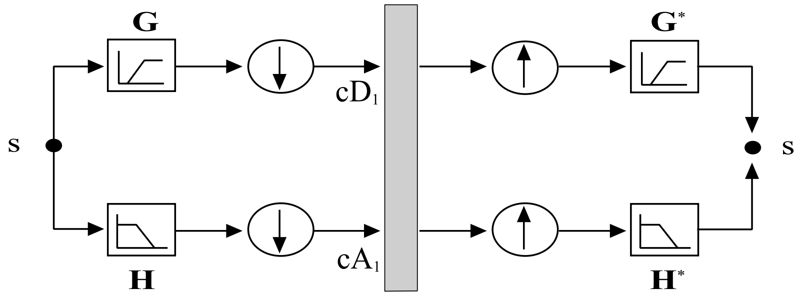

Рис. 1. Квадратурный зеркальный фильтр.

Если положить $g(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{h(\omega+\pi)}$ то получится одно условие на функцию $h(\omega)$

$$|h(\omega)|^2 + |h(\omega+\pi)|^2 = 2.$$

Сигнал s раскладывается при этом на составляющие

$$cD_1 = \downarrow G(s), \quad cA_1 = \downarrow H(s)$$

— высокой и низкой частоты или коэффициенты первого уровня деталей и аппроксимации сигнала, соответственно. Если сигнал s имел длину n то сигналы cD_1 и cA_1 будут иметь длину не более $\frac{n+2N-1}{2}$. Поступая аналогично с сигналом cA_1 получают следующий уровень разложения

$$\begin{aligned} cD_2 &= \downarrow G(cA_1), \\ cA_2 &= \downarrow H(cA_1). \end{aligned}$$

На k-ом шаге вейвлет разложение сигнала будет представлено коэффициентами аппроксимации и деталей разных уровней разрешимости

$$s \to \{cA_k, cD_k, cD_{k-1}, \ldots, cD_1\}.$$

Реконструкция сигнала происходит в обратной последовательности. Заметим, что для ортогонального вейвлета справедливо равенство

$$\|s\|^2 = \|cA_k\|^2 + \sum_{i=1}^{k} \|cD_i\|^2.$$

Для временных рядов вейвлет представление сигнала осуществляет эффективную “раскорреляцию”, за счет того, что компоненты относятся к разным частотным полосам. Очистка сигнала или его сжатие происходит за счет удаления “мелких” деталей. Если сигнал имеет конечную длину не в силу своей природы, а в силу технических ограничений, то на величине коэффициентов деталей будет дополнительно сказываться неявное использование нулевого продолжения сигнала. Имеются различные теоретические подходы к решению этой проблемы [2–4]. Хотя формально эти методы решают данную проблему, фактически она переходит в другую плоскость — нарушается инвариантность вейвлет базиса относительно трансляций, в результате граничные эффекты остаются, но уже в завуалированной форме.

Поэтому на практике предпочитают пользоваться классическим вейвлет разложением, а сигнал считают неограниченным во времени, распространяя его на всю временную ось (см. [5]). Например, базисный алгоритм для DWT, применяемый в системе Matlab, использует три разных метода для продолжения сигнала: дополнение нулями, симметризацию, гладкое дополнение. При этом возникают искажения в области границ сигнала, которые надо учитывать при удалении шума или при нахождении вейвлет-спектра. Результат может зависеть от метода продолжения. Вейвлет разложение не зависит от способа продолжения сигнала только в одном случае, когда сигнал имеет длину равную степени два и используется вейвлет Хаара.

В данной работе предлагается методика построения продолжения сигнала исходя из вейвлет разложения и априорной информации о сигнале. Рассмотрим продолжение сигнала на r отсчетов

$$\overline{s} = s + \sum_{j=1}^{r} x_{n+j} e_{n+j}.$$

Определим квадратичную форму формулой:

$$Q(x_1, \dots, x_r) = p_0\left(c\overline{A}_k\right) + \sum_{i=1}^{k} p_i\left(c\overline{D}_i\right),$$

где p_i, $i = 0, 1, \dots, k$ — квадраты евклидовых полунорм. Выбор этих полунорм определяется априорной информацией о природе сигнала, то есть его моделью. Пусть, например, эта модель имеет вид

$$s_t = f(t) + \varepsilon(t),$$

где $f(t)$ — полином степени ≤ 2, $\varepsilon(t)$ — шум белый (или цветной). Тогда целесообразно в качестве вейвлета использовать вейвлет, момент которого ≥ 2, в качестве полунормы p_0 — квадрат третьей производной, а полунормы p_i $i = 1, \dots, k$ подбирать исходя из спектра шума. В качестве иллюстрации рассмотрим рисунки полученные в системе Matlab. Сигнал $s_t = f(t) + \varepsilon(t)$, взятый в 20 отсчетах, есть сумма квадратичной функции и белого гауссова шума. На рис. 2, а изображены две экстраполяции сигнала, одна это $g(t)$ — обычный метод наименьших квадратов, другая построена на основе минимизации евклидовой полунормы $\|cD_1\|^2 + \|diff(cA_1, 3)\|^2$. На рис. 2, б изображена экстраполяция того же сигнала для евклидовой полунормы $\|cD_1\|^2 + 8\|diff(cA_1, 3)\|^2$;

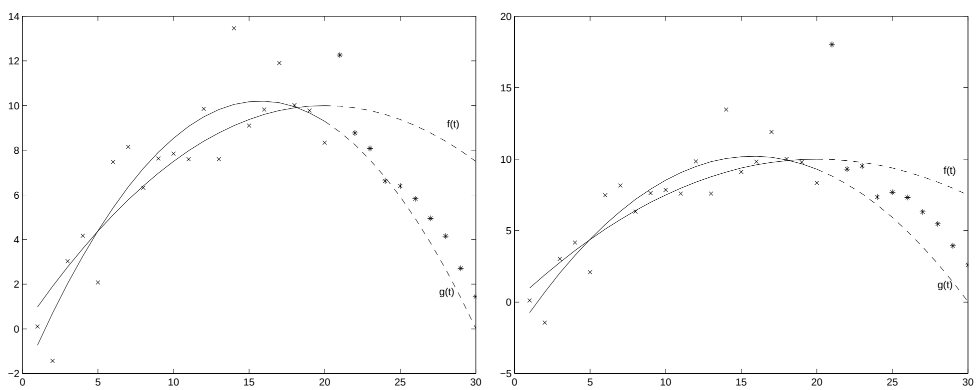

Рис. 2.

Указанный способ построения продолжения сигнала можно рассматривать как модификацию метода наименьших квадратов в приложении к вейвлет анализу. Данный метод можно использовать также при интерполяции сигнала.

Список литературы

[1] Левкович-Маслюк Л., Переберин А. Введение в Вейвлет анализ. http://inet.keldysh.ru/gc98/cd/html/tutor/r.htm

[2] Cohen A., Daubechies I., Vial J.-C. Wavelets and fast wavelet transforms on the interval. ACHA 1. 1994. P. 54–81.

[3] Cohen A., Dahmen W., DeVore R. Multiscale Decompositions on Bounded Domains, 1996.

[4] Kilgore T., Prestin J. Polynomial Wavelets on the Interval Constr. Approx. 12, 1996. P. 95–110.

[5] Zheng D., Chao B. F., Zhou Y., Yu N. Improvement of edge effect of the wavelet time-frequency spectrum: application to the length-of-day series Journal of Geodesy. 74, 2000. P. 249–254.