

## ПРОБЛЕМА УЧЕТА ВЯЗКОСТИ В МЕТОДАХ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Б. Ю. СКОБЕЛЕВ, О. А. ШМАГУНОВ

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: scobelev@online.nsk.su

One of the cardinal problems in the methods of discrete vortices is consideration of the viscosity influence. In the present paper the viscosity is taken into account by way of varying the invariants of ideal vortex elements system. Numerical investigation of various characteristics of a plain jet has been carried out.

### Введение

Метод дискретных вихрей в последнее время широко применяется для численного расчёта внешних течений несжимаемой жидкости. Так как он не требует построения сеток, то существенно упрощается задача расчёта обтекания тел сложной конфигурации. Идеальные вихревые элементы хорошо описывают интегральные характеристики летательных аппаратов и крупномасштабные турбулентные структуры [1, 9]. Для описания мелкомасштабных турбулентных характеристик необходимо учитывать вязкость. Существуют различные подходы к решению этой проблемы: метод случайных блужданий [5]; метод гауссовой диффузии завихренности без учёта конвекции [7]; с учётом конвекции завихренности [6]. Все эти методы базируются на уравнении для вязкой диффузии завихренности (уравнении теплопроводности).

В работе авторов [10] был предложен качественно новый подход. Существенная особенность нового подхода заключается в том, что для учёта вязкости используются интегральные характеристики — инварианты движения системы дискретных вихревых элементов: импульс, момент импульса, кинетическая энергия. Законы изменения инвариантов движения под влиянием вязкости и внешней скорости были получены из уравнений Навье—Стокса в работах [2, 4]. После каждого шага интегрирования невязких уравнений движения для системы вихревых элементов результаты расчётов (координаты и циркуляция вихревых элементов) корректируются так, чтобы выполнялись уравнения изменения инвариантов.

Завихренность, диффундирующая из ядра потока на бесконечность под влиянием вязкости, учитывается с помощью вторичных вихрей. Координаты и циркуляции вторичных вихрей находятся из условий сохранения полной циркуляции и координат центра завихренности.

В данной работе проводится численный расчёт различных характеристик плоской струи. Сравнение полученных результатов с теоретическими и экспериментальными данными показало, что метод, развитый в работе [10], хорошо описывает влияние вязкости как при больших, так и при умеренных значениях числа Рейнольдса.

### 1. Метод учёта вязкости

В двумерных течениях невязкой жидкости, покоящейся на бесконечности, помимо полной завихренности и координат центра завихренности инвариантами являются энергия завихренности

$$W = -\frac{\rho}{4\pi} \iint \omega \omega' \ln |r - r'| dS dS', \quad (1)$$

где  $\omega \equiv \omega(x, y)$  — распределение завихренности,  $r = (x, y)$  и интегрирование ведётся по всей поверхности, занятой потоком. А также величина  $L^2$ , с точностью до численного множителя совпадающая с моментом импульса

$$L^2 = \int \omega(x^2 + y^2) dS. \quad (2)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00515) и целевой программы поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН.

© Б. Ю. Скобелев, О. А. Шмагунов, 2001.

В работе [2] было получено, что под влиянием вязкости величины (1), (2) изменяются по следующим законам:

$$\frac{dW_0}{dt} = -\mu_0 \int_{S_0} \omega^2 dS, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int \omega (x^2 + y^2) dS = \frac{4\mu_0}{\rho} \int \omega dS. \quad (4)$$

Дискретный аналог инварианта (2) хорошо известен:

$$L^2 = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (5)$$

а для дискретного аналога инварианта (1) в работе [10] было получено следующее выражение:

$$E = \rho \left[ \frac{5}{32\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 - \frac{1}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln |r_i - r_j| \right], \quad (6)$$

( $\Gamma_k$  — циркуляция  $k$ -го вихря,  $r_i = (x_i, y_i)$  — координаты точечных вихрей). Были найдены законы изменения инвариантов (5), (6) под действием вязкости.

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \quad (7)$$

$$\frac{dL^2}{dt} = 0. \quad (8)$$

Уравнения движения точечных вихрей в гамильтоновой форме имеют вид:

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

где

$$H = -\frac{\rho}{4\pi} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j \ln |r_i - r_j|.$$

После каждого шага интегрирования уравнений (9) выполняется преобразование координат и циркуляций точечных вихрей для того, чтобы выполнялись законы (7), (8). Пусть  $\tilde{x}_i(n+1)$ ,  $\tilde{y}_i(n+1)$  — координаты  $i$ -го вихря, полученные на  $(n+1)$ -ом временном слое при интегрировании уравнений (9), и  $\Gamma_i(n)$  — соответствующая циркуляция (она не меняется при переходе с  $n$ -го на  $(n+1)$  слой). Для того, чтобы выполнялись конечно-разностные уравнения

$$\Delta E = -\nu \Delta t \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2, \quad \Delta L^2 = 0, \quad (10)$$

полученные из (7), (8), делаются следующие преобразования:

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= [1 + \Delta L(n+1)] \tilde{x}_i(n+1), \\ y_i(n+1) &= [1 + \Delta L(n+1)] \tilde{y}_i(n+1), \\ \Gamma_i(n+1) &= [1 + \Delta \Gamma(n+1)] \Gamma_i(n). \end{aligned} \quad (11)$$

Значения параметров преобразований  $\Delta L(n+1)$ ,  $\Delta \Gamma(n+1)$  определяются из уравнений (10).

## 2. Численный алгоритм расчёта плоской струи

За основу был взят метод дискретных вихрей для идеальной жидкости [1, 3]. Расчётная область представляет собой сопло, состоящее из двух параллельных друг другу стенок, длиной  $L_s = 4,5$ , отстоящих на

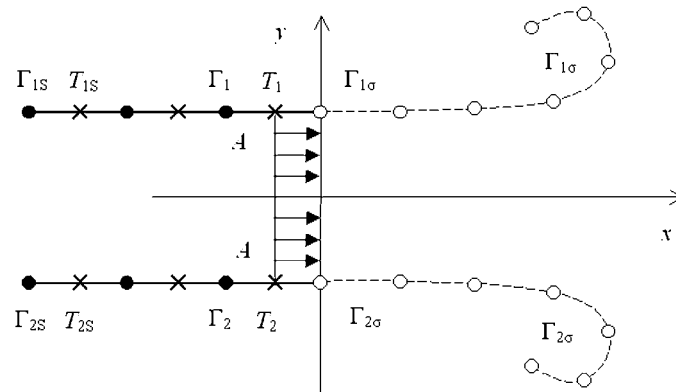


Рис. 1.

расстоянии  $2R_s = 2$  друг от друга. Стенки сопла моделировались двумя системами из  $N = 30$  равноотстоящих точечных вихрей  $\Gamma_{1Si}, \Gamma_{2Si}$  и расположенных посередине между ними контрольных точек  $T_{1Si}, T_{2Si}$ : В каждый момент времени на краях сопла образуется 2 новых вихря  $\Gamma_{1S\nu}, \Gamma_{2S\nu}$ , которые начинают перемещаться в поле скоростей, наведенных всей системой вихрей. Необходимо определить циркуляции вихрей на стенках, а также циркуляции двух новых вихрей. Имеется условие непротекания в контрольных точках, которое даёт  $2N$  уравнений:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^N w_{kSi}(T_{lSj}) \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} w_{k\sigma i}(T_{lSj}) \Gamma_{k\sigma i} \right] = 0, \quad l = 1, 2, j = 1, N. \tag{12}$$

Ещё одно уравнение получается из условия сохранения суммарной циркуляции:

$$\sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^N \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} \Gamma_{k\sigma i} \right] = 0. \tag{13}$$

И замыкается система уравнением расхода через сопло:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 \left[ \sum_{i=1}^N w_{xkSi}(A_j) \Gamma_{kSi} + \sum_{i=1}^{\nu} w_{xk\sigma i}(A_j) \Gamma_{k\sigma i} \right] \Delta S_j = Q(\tau_\nu), \tag{14}$$

$n$  — количество точек в сечении сопла, интегрированием по которым насчитывался выходной поток. В расчётах  $n = 10$ .

Из решения системы находятся циркуляции всех вихрей, что позволяет рассчитать скорости в точках расположения свободных вихрей и найти их новые координаты интегрированием уравнений:

$$\frac{dx_{k\sigma i}}{d\tau_\nu} = w(\Gamma_{k\sigma i}), \quad \frac{dy_{k\sigma i}}{d\tau_\nu} = w(\Gamma_{k\sigma i}). \tag{15}$$

В расчётах шаг по времени  $\Delta t = 0, 2$ .

Как уже говорилось в разделе 2, после каждого шага интегрирования выполняется вязкая коррекция координат и циркуляций свободных вихрей (11). При этом учитывается, что инварианты свободных вихрей изменяются под действием внешней скорости  $U = (U_x, U_y)$ , индуцированной неподвижными вихрями. Законы этих изменений были получены в [4], и в конечно-разностной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta \tilde{t} \sum_{i=1}^N \Gamma_i (u_{xi} U_{yi} - u_{yi} U_{xi}), \\ \Delta L^2 &= \Delta \tilde{t} \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i U_{xi} + y_i U_{yi}), \end{aligned} \tag{16}$$

где  $U_i$  — значение внешней скорости в точке  $i$ -го вихря,  $u_i$  — скорость, индуцированная в этой точке свободными вихрями, исключая  $i$ -ый вихрь. Поэтому перед вязкой коррекцией из значений энергии и

дисперсии, сосчитанных по формулам (5), (6), вычитаются значения этих величин, найденные по формулам (16).

*Вторичные вихри.*

В результате вязкой коррекции циркуляции свободных вихрей уменьшаются. Следовательно, уменьшается полная циркуляция течения. Но, так как полная циркуляция является инвариантом, то в систему вихрей после вязкой коррекции добавлялась пара вторичных вихрей противоположных знаков. Их координаты и циркуляции определялись из условия сохранения суммарной циркуляции (2) и координат центра завихренности для групп вихрей каждого знака.

*Объединение вихрей.*

Число уравнений возрастает линейно с количеством вихрей, соответственно требуемое время счёта возрастает как  $n^2$ . Поскольку же обычно интересующая область течения находится недалеко от сопла, необходима процедура, позволяющая сократить время счёта за счёт объединения вихрей, удалившихся от сопла на достаточно большое расстояние. Начиная с некоторого шага (в данных расчётах  $N_{un} = 400$ ) вихри объединялись попарно, отдельно для положительной и отрицательной циркуляции, с сохранением суммарной циркуляции и центра завихренности.

Значения других расчётных параметров брались следующими. Полное время счёта  $T = 160$ . Профили продольной скорости и интенсивность турбулентности рассчитывались при усреднении  $T_{usr} = 120 - 160$ .

### 3. Результаты

На рис. 1, 2 приведена характерная картина течения. Интересно отметить, что вторичные вихри, моделирующие вязкую диссипацию завихренности из ядра потока, образуют две ленты на значительном расстоянии от основного течения.

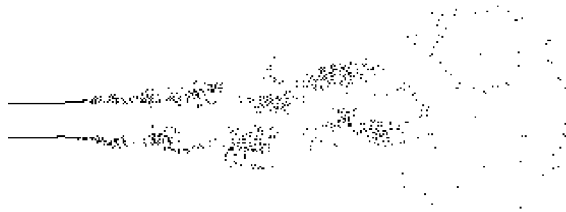


Рис. 2. Кинематическая вязкость — 0,0001, шаг по времени — 0,1, число шагов — 800. Вторичные вихри не показаны.



Рис. 3. Полная картина течения.

При обезразмеривании уравнений движения в качестве характерной длины бралась полуширина сопла, а характерной скорости — скорость на срезе сопла. Расчёты показали, что независимо от значений числа Рейнольдса из диапазона  $100 < Re < 10^5$  струю можно разбить на три характерных области:  $0 < x < 8$  — начальная (струйный профиль ещё не сформировался, и течение, по сути, состоит из двух слоёв сдвига;  $8 < x < 12$  — ламинарная;  $x > 12$  — турбулентная. В ламинарной области численные расчёты полуширины струи и профиля продольной скорости хорошо совпадают с теоретическими результатами [2].

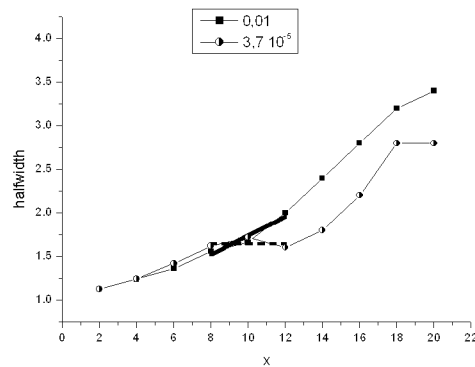
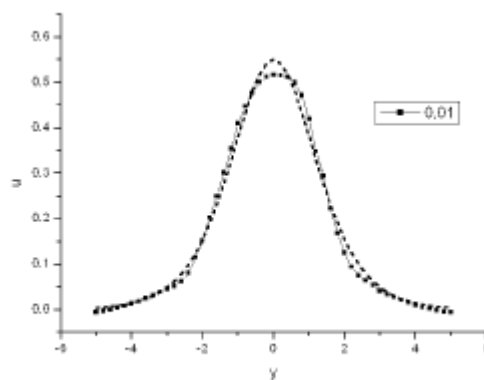


Рис. 4. Полуширина струи.

Рис. 5. Профиль продольной скорости  $x = 10$ ,  $Re = 100$ .

На рис. 3 приведены результаты расчёта полуширины струи при двух значениях кинематической вязкости: 0,01 и  $3,7 \cdot 10^{-5}$ . Жирной линией и жирным пунктиром изображена аппроксимация по теоретической формуле:

$$\Pi = c_0 (x + x_0)^{2/3} \nu^{2/3}.$$

Коэффициент  $c_0 = 7,39$  для всех значений вязкости, а  $x_0$  зависит от вязкости и равен 2,06; 2712. Это понятно, так как формула получена в погранслоном приближении.

На рис. 4 показан профиль продольной скорости при  $x = 10$ ,  $Re = 100$ . Пунктиром показана аппроксимация по формуле:

$$u = 6\nu\alpha^2 (x + x_0)^{-1/3} \operatorname{sch}^2(\alpha\eta), \quad \eta = \frac{y}{(x + x_0)^{2/3}}, \quad \alpha = \left(\frac{F}{48\nu^2}\right)^{1/3},$$

$$F = 0,65, \quad x_0 = 24.$$

Аналогичные результаты получены при других значениях вязкости. Так же, как и в предыдущей формуле величина  $x_0$  зависит от вязкости.

На рис. 5, 6 приведено сравнение продольных составляющих профиля средней скорости и интенсивности пульсаций с экспериментальными результатами [8]. Вязкость —  $3,7410^{-5}$ , пустые кружки — расчёт, полные — эксперимент. По оси абсцисс (вверху) отложено расстояние от среза сопла, внизу — значения величин. По оси ординат — расстояние от оси струи. Видно, что численные расчёты достаточно хорошо совпадают с экспериментальными результатами.

Как уже говорилось, в струе наблюдаются три области течения: начальная, ламинарная и турбулентная. Переход одной области в другую происходит благодаря потере устойчивости и росту характерных возмущений течения. По мере удаления от среза сопла сдвиговые слои, составляющие начальный участок, теряют устойчивость. В результате появляются нарастающие возмущения, которые сначала растут экспоненциально в соответствии с линейной теорией устойчивости, затем наступает стадия нелинейного развития, характеризующаяся замедлением роста и появлением гармоник, после чего формируется новый

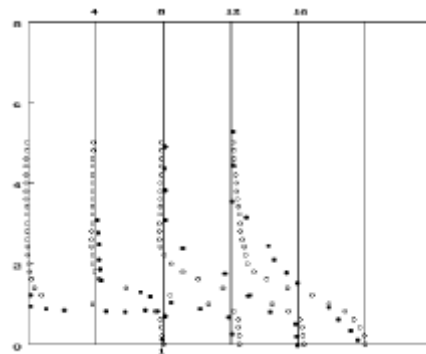


Рис. 6. Средняя скорость.

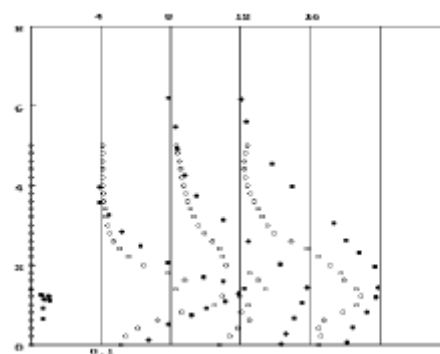


Рис. 7. Интенсивность пульсаций.

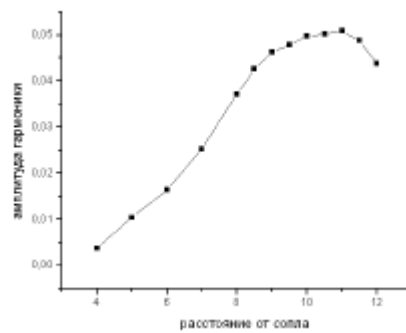


Рис. 8. Нарастание возмущений в начальном участке струи. Вязкость — 0.001.

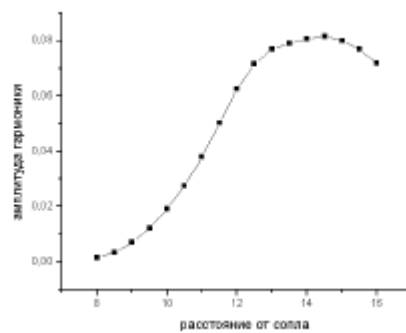


Рис. 9. Нарастание возмущений в ламинарном участке струи. Вязкость — 0.01.

профиль течения. Аналогичная картина наблюдается при переходе от ламинарной области к турбулентной. Соответствующие результаты расчётов приведены на рис. 7, 8.

Анализ графиков на рис. 7, 8 показывает, что характер развития возмущений хорошо согласуется с теоретическими представлениями: сначала — экспоненциальное нарастание, затем — замедление и стабилизация. Причём на последних стадиях наблюдается появление различных гармоник основного возмущения.

## Список литературы

- [1] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., НИШТ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
- [2] БЭТЧЕЛОР ДЖ. Введение в динамику жидкости. М.: Мир. 1973.
- [3] ДВОРАК А. В., ХЛАПОВ Н. В. Турбулентные характеристики плоской струи. В сб. Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды Военно-воздушной академии им. Жуковского. 1986. Вып. 313. С. 76–84.
- [4] ШАВАЛИЕВ М. Ш. В сб.: Механика неоднородных и турбулентных потоков. М.: Наука. 1989.
- [5] CHORIN A. J. J. Fluid Mech. 1973. 57, 785.
- [6] COTTET G. H., MAC-GALLIC S., RAVIART P. A. In: Computational fluid dynamics and reacting gas flows (eds) B. Engquist, M. Luskin, A. Majda (New York: Springer-Verlag). 1988. P. 47–68.
- [7] GREENGARD C. J. Comput. Phys. 1985. 61, 345.
- [8] HUSSAIN A. K. M. F., THOMPSON C. A. J. Fluid Mech. 1980. 100, 397.
- [9] LEONARD. Annu. Rev. Fluid Mech. 1985. 17, 523.
- [10] SCOBEL'EV, B. YU., SHMAGUNOV O. A. In: Fluid Mechanics and Its Applications. Vol.44 (ed. E. Krause and K. Gersten), Kluwer Academic Publishers. 1998. P. 95–104.