ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. Ю. Филимонов
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
e-mail: fmy@imm.uran.ru

A method of special series is presented. This method is a constructive approach to representing solutions of nonlinear partial differential equations in the form of series with recurrently calculated coefficients by the powers of certain functions. These functions are called a basic functions. This method is developed in the academician A.F.Sidorov scientific school. In the paper the up-to-date situation in this field is presented and the following development of the method is suggested for more wide class of nonlinear equations and initial conditions by using new classes of basic functions.

1. Общая схема построения специальных рядов

В настоящее время перспективным направлением получения приближенных решений нелинейных уравнений с частными производными является сочетание численных и аналитических методов. Метод специальных рядов является одним из аналитических способов построения решений нелинейных уравнений с частными производными, получивший свое развитие после работы А. Ф. Сидорова [7]. Этот метод может служить также и для конструктивного способа доказательства теорем существования решений нелинейных уравнений в том числе и в неограниченных областях. Особенностью метода специальных рядов является возможность определения их коэффициентов рекуррентно, без использования различных операций "обрезания", имеющих место, например, для метода Фурье, в случае решения нелинейных задач. Главная идея рассматриваемого метода состоит в разложении решения в ряд по степеням одной или нескольких специальным образом выбираемых базисных функций. Такой выбор позволяет находить коэффициенты ряда последовательно как решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Обзор результатов, полученных в этом направлении, имеется в работах [4, 11, 19].

Опишем один из возможных подходов построения специальных рядов на примере следующего уравнения:

$$F\left(t, u, \dots, \frac{\partial^{k_0+k_1} u}{\partial t^{k_0} \partial x^{k_1}}, \dots\right) = 0, \tag{1.1}$$

где F — аналитическая функция своих переменных, кроме, быть может, первой. Для этого рассмотрим кольцо K_t, элементами которого являются абсолютно сходящиеся кратные ряды по некоторой системе функций $P_1(x)$, …, $P_m(x)$

$$u(x,t) = \sum_{|\mathbf{n}|=0}^{\infty} g_{\mathbf{n}}(t) \prod_{i=1}^{m} P_i^{n_i}(x), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_m$.

Предположим, что функции $P_1(x)$, …, $P_m(x)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$P_i' = \sum_{j=i}^{m} a_{ij} P_j + W_i(P_1, \dots, P_m). \tag{1.3}$$

Здесь $a_{ij} = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,m}$, и функции $W_k(P_1, \dots, P_m)$ являются аналитическими функциями с условиями $W_k(0, \dots, 0) = 0$, $\partial W_k(P_1, \dots, P_m)/\partial P_s = 0$, $k, s = \overline{1,m}$, при $P_1 = P_2 = \dots P_m = 0$. Соотношение (1.3) обеспечивает инвариантность кольца K_t относительно операции частного дифференцирования по x.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00–01–00370, № 00–15–96042, и целевой программы поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН.

Справедливо

Утверждение 1. *При соответствующем рекуррентном построении коэффициентов $g_n(t)$ кратный ряд (1.2) является формальным решением уравнения (1.1).*

Данное утверждение проверяется подстановкой ряда (1.2) в уравнение (1.1), дифференцированием и перемножением рядов с учетом соотношения (1.3). Затем после приравнивания выражений при одинаковых степенях $P_1^{n_1}(x), \dots, P_m^{n_m}(x)$ коэффициенты ряда $g_{\mathbf{n}}(t)$ будут находиться последовательно из цепочки линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнение для свободного члена ряда $g_{\mathbf{0}}(t)$ может быть нелинейным). Заметим, что рекуррентность нахождения коэффициентов ряда в этом случае достигается за счет особенности линейной части системы (1.3). Для двойных специальных рядов это доказано в работе [9], для кратных — в работе [13]. При этом оказывается, что для вычисления коэффициентов кратных рядов в случае $m \geq 2$ нужно использовать следующую нумерационную функцию:

$$c(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{m-1} j n_j + m^{-1} \prod_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{m} n_j + i \right). \tag{1.4}$$

С помощью этой функции задается последовательность нахождения коэффициентов $g_{\mathbf{n}}(t)$ ряда (1.2), т.е. коэффициент $g_{\mathbf{l_1}}(t)$ вычисляется раньше коэффициента $g_{\mathbf{l_2}}(t)$, если выполняется неравенство $c(\mathbf{l_1}) < c(\mathbf{l_2})$. В случае равенства нумерационных функций порядок нахождения соответсвующих коэффициентов ряда безразличен, так как эти коэффициенты не участвуют в определении друг друга. Заметим, что для двух базисных функций ($m = 2$) нумерационная функция (1.4) совпадает с канторовской нумерацией

$$c(n_1, n_2) = n_1 + 0.5(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1),$$

применяемой в работе [9].

Определение 1. *Базисные функции, удовлетворяющие уравнениям вида (1.3), а также ряды по степеням этих функций будем называть универсальными.*

Заметим, что при $i = m = 1$ система (1.3) есть нелинейное уравнение первого порядка

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k Q^k(x), \quad q_k = \mathrm{const}.$$

В этом случае структура базисных функций полностью описана [19]. Примерами базисных функций $Q(x)$ являются функции $Q_{1k}(x) = (x+1)^{-1/k}$, $k \geq 1$; $Q_2(x) = \exp(-ax)$, $a > 0$. Отрезками ряда (1.2) при $m=1$ можно равномерно по $x \in [0, \infty]$ приблизить любое начальное условие $u_0(x)$ такое, что $\lim\limits_{x \to +\infty} u_0(x) = 0$ (см. работу [19]).

Приведем примеры базисных функций для кратных специальных рядов с $m \geq 2$.

В случае $m = 2$ можно рассмотреть пару функций

$$P_1(x) = x/(1+x^2), \quad P_2(x) = 1/(1+x^2), \tag{1.5}$$

для которых система (1.3) имеет вид $P_1' = P_2^2 - P_1^2$, $P_2' = -2P_1P_2$.

В случае $m = 3$ следующие функции $P_1(x) = x\exp(x)$, $P_2(x) = \exp(-x)$, $P_3(x) = \exp(x)$ удовлетворяют системе (1.3) вида

$$P_1' = P_1 + P_3, \quad P_2' = -P_2, \quad P_3' = P_3. \tag{1.6}$$

Заметим, что с помощью базисных функций (1.6) в качестве начальных данных $u_0(x)$ для уравнения (1.1) можно задать любую аналитическую функцию. Действительно, $x^k = P_1^k P_2^k$, и аналитические начальные данные представимы в виде ряда

$$u_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (P_1 P_2)^i, \quad a_i = \mathrm{const}.$$

В данном примере универсальная базисная функция P_3 не используется при задании начальных данных, но она необходима для рекуррентного нахождения коэффициентов ряда (1.2).

Описанные выше конструкции специальных рядов могут быть использованы для представления решений широкого класса нелинейных уравнений с частными производными. При этом специфика исходного нелинейного уравнения (1.1) не учитывается.

Сходимость специальных рядов доказана для различных классов нелинейных уравнений [6, 8, 10, 13–15, 19].

2. Базисные функции, имеющие функциональный произвол

Конструкции рядов, описанные выше, удобно использовать при решении задач Коши. Поэтому для того, чтобы иметь принципиальную возможность для приближенного удовлетворения краевого условия, в работе [5] были предложены ряды

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)P^n(x,t) \tag{2.1}$$

по степеням одной базисной функции $P(x,t)$, которая также позволяет находить коэффициенты ряда $u_n(t)$ рекуррентно и при этом может уже зависеть от произвольной функции $f(t)$. Опишем эту конструкцию рядов для m базисных функций $P_1(x,t)$, ..., $P_m(x,t)$ и следующего ряда:

$$u(x,t)=\sum_{|\mathbf{n}|=0}^{\infty}g_{\mathbf{n}}(t)\prod_{i=1}^{m}P_i^{n_i}(x,t), \tag{2.2}$$

являющегося также элементом некоторого кольца K_t. Предположим, что функции $P_1(x,t)$, ..., $P_m(x,t)$ удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau_\sigma}=\sum_{j=i}^{m}A_{ij}^{\sigma}(t)P_j(x,t)+\sum_{|\mathbf{n}|\geq 2}a_{i\mathbf{n}}^{\sigma}(t)\prod_{i=1}^{m}P_i^{n_i}(x,t)\equiv R_{i\sigma}(t,P). \tag{2.3}$$

Здесь $\sigma=0,1$, $\tau_0=t$, $\tau_1=x$, $i=\overline{1,m}$ и функции $A_{ij}^{\sigma}(t)$, $a_{i\mathbf{n}}^{\sigma}(t)\in C^1[0,\infty)$ обеспечивают абсолютную сходимость в некоторой области рядов в правых частях соотношений (2.3). Также следует задать условие совместности соотношений (2.3) $\dfrac{\partial R_{i0}}{\partial x}=\dfrac{\partial R_{i1}}{\partial t}$, $i=\overline{1,m}$. Из условий (2.3) следует инвариантность кольца K_t относительно операции частного дифференцирования по x и t.

Поэтому справедливо

Утверждение 2. *При соответствующем рекуррентном построении коэффициентов $g_{\mathbf{n}}(t)$ кратный ряд (2.2) является формальным решением уравнения (1.1).*

Последовательность нахождения коэффициентов $g_{\mathbf{n}}(t)$ ряда (2.2) и в этом случае задается с помощью нумерационной функции (1.4).

Для приближенного удовлетворения заданного краевого условию в работе [6] для уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) применялась базисная функция

$$P(x,t)=(\exp(bx)+f(t))^{-1},\quad f(t)\in C^1[0,\infty),\quad b=\text{const}, \tag{2.4}$$

удовлетворяющая соотношениям вида (2.3)

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-bP+f(t)P^2,\quad \frac{\partial P}{\partial t}=-f'(t)P^2.$$

Решения строилось в виде ряда (2.1), (2.4), сходящегося в полуограниченной области $x\geq 0$, $t\geq 0$. Функциональный произвол, содержащися в базисной функции (2.4), использовался для приближенного удовлетворения краевого условия при $x=0$. В качестве начального условия можно взять любую непрерывную функцию $u_0(x)$ ($\lim\limits_{x\to+\infty}u_0(x)=0$) и равномерно по $x\in[0,\infty]$ приблизить с помощью базисной функции (2.4) (см. работу [19]). Численные расчеты [6] показали, что на ограниченном промежутке времени отрезок ряда (2.1) хорошо передает краевой режим, т. е. определяется подходящая функция $f(t)$. Однако, с ростом числа членов ряда трудоемкость определения функции $f(t)$ сильно возрастает.

Замечание 1. *Имеются также примеры специальных рядов, с помощью которых нулевые краевые условия могут быть удовлетворены точно [15, 16].*

Замечание 2. *В работе [12] было показано, что за счет выбора произвольной функции можно доказать также глобальную сходимость специального ряда к решению задачи Коши для некоторого класса нелинейных уравнений с частными производными. Тем самым получен положительный ответ на вопрос А.Ф. Сидорова [5] о возможности использовать функциональный произвол для установления сходимости специальных рядов.*

Приведем схему исследования сходимости кратного ряда (2.2) на примере следующего уравнения:

$$u_t=\gamma\frac{\partial^{2r+1}u}{\partial x^{2r+1}}+F\left(t,u,\cdots,\frac{\partial^{2r}u}{\partial x^{2r}}\right), \tag{2.5}$$

где $\gamma \neq 0$, r — натуральное число, F — аналитическая в нуле функция всех своих переменных, кроме, быть может, первой. Такой класс эволюционных уравнений описывает достаточно содержательные модели механики сплошной среды. Например, уравнение (2.5) с функцией

$$F = -u_x u^q,$$

где q — натуральное число, есть обобщенное уравнение КдФ [2], котрое при $q = 1$, $r = 1$ является обычным уравнением КдФ, описывающее распространение длинных волн конечной амплитуды, при $q = 2$, $r = 1$ — уравнение альфвеновской волны в бесстолкновительной плазме. Для такого типа уравнений имеются теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в случае, когда начальные условия достаточно быстро убывают [2].

Примерами базисных функций, которые позволяют задавать такие начальные данные являются следующие функции:

$$P_1(x,t) = (\exp(-nx) + f(t)\exp(kx)), \quad P_2(x,t) = \exp(kx)P_1(x,t). \tag{2.6}$$

Здесь n, k — натуральные числа; $f(t) \in C^1[0,\infty)$. Для функций (2.6) соотношения (2.3) имеют вид

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = nP_1 - (n+k)fP_1P_2, \quad \frac{\partial P_1}{\partial t} = -f'P_1P_2,$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = (k+n)P_2 - (n+k)fP_2^2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t} = -f'P_2^2.$$

Пусть начальные условия для уравнения (2.5) представимы в виде сходящегося ряда по степеням базисных функций (2.3)

$$u(x,0) = \sum_{|\mathbf{n}|=1}^{\infty} g_{\mathbf{n}}^{(0)} \prod_{i=1}^{m} P_i^{n_i}(x,0), \quad g_{\mathbf{n}}^{(0)} = \mathrm{const}. \tag{2.7}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\gamma A_{ii}^1(t) < 0$, $i = \overline{1,m}$, $t \geq 0$;

2. $A^{-1}a < \epsilon_m(F) < 1$, *где* $a = \sup\limits_{i,j,\sigma,\mathbf{n},t} \left\{|a_{i\mathbf{n}}^{\sigma}(t)|, |A_{ij}^{\sigma}(t)|\right\}$, $A = \inf\limits_{i,t} |A_{ii}^1(t)| > 0$, $\epsilon_m(F) = \mathrm{const}$;

3. $|g_{\mathbf{n}}^{(0)}| \leq \dfrac{M}{(1+n_1)^{2r+1}\cdots(1+n_m)^{2r+1}}$, $\quad M > 0$.

Тогда ряд (2.2) сходится в области $G = \{(x,t) : t \geq 0, |P_i(x,t)| < 1, i = \overline{1,m}\}$ *к решению задачи Коши (2.5), (2.7).*

Доказательство. Коэффициенты ряда $g_{\mathbf{n}}(t)$ находятся последовательно из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &g_{\mathbf{n}}'(t) + b_{\mathbf{n}}(t)g_{\mathbf{n}}(t) = R_{\mathbf{n}}(t), \\ &g_{\mathbf{n}}(0) = g_{\mathbf{n}}^{(0)}, \quad |\mathbf{n}| \geq 1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где в функцию $R_{\mathbf{n}}(t)$ входят коэффициенты $g_{\mathbf{l}}(t)$ с $c(\mathbf{l}) \leq c(\mathbf{n})$. Решения уравнений (2.8) представимы в виде

$$g_{\mathbf{n}}(t) = \exp(-d_{\mathbf{n}}(t)\left(g_{\mathbf{n}}^{(0)} + \int_0^t \exp(d_{\mathbf{n}}(\tau)R_{\mathbf{n}}(\tau)d\tau\right), \quad d_{\mathbf{n}}(t) = \int_0^t b_{\mathbf{n}}(\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Из первого условия теоремы следует справедливость неравенств

$$|d_{\mathbf{n}}(t)| \leq |\gamma|(A|\mathbf{n}|)^{2r+1}t, \quad t \geq 0. \tag{2.10}$$

С помощью равенства (2.9) и неравенства (2.10) методом математической индукции аналогично тому, как это сделано в работе [15], можно доказать неравенства

$$|g_{\mathbf{n}}(t)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-|\gamma|t}M}{(1+n_1)^{2r+1}\cdots(1+n_m)^{2r+1}},$$

из которых и следует утверждение теоремы.

Замечание 3. *При доказательстве сходимости ряда (2.2) использовалась величина числа* $\epsilon_m(F)$, *которая зависит от числа базисных функций* m *и от вида уравнения (2.5). Для уравнения КдФ и базисной* *функции (2.4) в работе [6] была получена оценка для* $\epsilon_1(F)$ *следующего вида:* $\epsilon_1(F) \le \left(\sqrt[3]{2}-1\right) / \left(2-\sqrt[3]{2}\right)$. *В результате численных расчетов оказалось, что ряд (2.1) будет расходиться, если* $\epsilon_1(F)$ *будет больше этой величины.*

Замечание 4. *Условия теоремы 1 выполнены для базисных функций (2.6), если функция* $f(t)$ *удовлетворяет неравенству* $0 < f(t) \le \epsilon_2(F)$. *В этом случае ряд (2.2), (2.6) сходится в полуограниченной области* $x \le 0$, $t \ge 0$.

Замечание 5. *Существенным условием, используемым для доказательства сходимости ряда (2.2) для уравнений не типа Коши-Ковалевской, является также вид линейной части в дифференциальных соотношениях (2.3). Так, например, сходимость двойного ряда для уравнения КдФ по степеням базисных функций (1.5) в работе [9] не была установлена.*

Замечание 6. *В правые части дифференциальных соотношений (2.3) могут входить также базисные функции* P_i *и в отрицательных степенях. Такая система функций была названа обобщенными базисными функциями [13]. В этом случае для уравнения (2.5) и более широкого класса начальных данных доказана сходимость соответствующего специального ряда.*

3. Согласованные базисные функции

Для дальнейшего расширения класса начальных условий рассмотрим функций $R(x,t)$, удовлетворяющих дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 &= \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k(t) R^k, \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) R^k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $k_0 \ge 2$ и функции $a_k(t)$, $b_k(t) \in C^1[0,\infty)$ такие, что ряды в правых частях соотношений (3.1) предполагаются абсолютно сходящимися при $|R| \le R_0$, $R_0 > 0$ и $t \ge 0$. Нетрудно показать, что система (3.1) совместна, если функции $a_k(t)$ и $b_k(t)$ находятся из дифференциальных уравнений

$$a_k' = \sum_{l+n=k+1} a_l b_n (2n-l).$$

Определение 2. *Базисные функции, удовлетворяющие условиям (3.1), а также ряды по степеням этих функций будем называть согласованными.*

Примерами таких функций являются $R_1(x,t) = (x^2+f(t))^{-1}$, $R_2(x,t) = (\cos^2 x + f(t))^{-1}$, $R_3(x) = 4/(e^x+e^{-x})^2$.

Заметим, что все универсальные базисные функции $Q(x)$ удовлетворяют первому из соотношений (3.1). Однако, среди таких функций нет, например, периодических.

Опишем класс уравнений, которые допускают построение решений в виде специальных рядов

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) R^n(x,t) \tag{3.2}$$

по степеням как универсальных, так и согласованных функций. Рассмотрим класс нелинейных уравнений

$$L_t u = \sum_{j=0}^{\infty} A_{p_j}(t) u^{k_{0j}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{k_{1j}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{l_{1j}} \cdots \left(\frac{\partial^{2m-1} u}{\partial x^{2m-1}}\right)^{k_{mj}} \left(\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}\right)^{l_{mj}}, \tag{3.3}$$

где $L_t = \dfrac{\partial}{\partial t} + \cdots + \dfrac{\partial^q}{\partial t^q}$, $A_{p_j}(t) \in C[0,\infty)$, $p_j = (k_{oj}, k_{1j}, l_{1j}, \cdots, k_{mj}, l_{mj})$, $k_{0j} + \sum_{i=1}^m (k_{ij}+l_{ij}) = j$, ряд (3.3) предполагается абсолютно сходящимся в некоторой области.

Справедливо

Утверждение 3. *Согласованный ряд (3.2) является формальным решением уравнения (3.3), если для показателей* k_{ij} *при любом* j *выполнены условия* $\sum\limits_{i=1}^{m} k_{ij} = 2N_j$, N_j *— натуральное число.*

Замечание 7. *Если уравнение (3.3) является уравнением типа Коши — Ковалевской, то согласованный ряд (3.2) будет сходиться для* $0 \le t \le T$, $(T>0)$ *и всех* x, *для которых* $|R| \le 1$.

Примеры базисных функций $R_1(x,t)$, $R_2(x,t)$ при $f(t) \geq 1$ и $R_3(x)$ свидетельствуют, что сходимость рядов может быть установлена для всех x. Доказательство сходимости ряда (3.2) в этом случае осуществляется аналогично тому, как это сделано в работах [12, 15].

Замечание 8. *Базисные функции (3.1) могут быть согласованы не только с уравнением вида (3.3), но и с уравнениями, имеющими особенности, для которых формальное решение в виде универсального ряда построить не удается. Например, для уравнения стационарных осесимметричных течений газа [12] удается доказать сходимость согласованного ряда в неограниченной области для конкретной базисной функции.*

Исследование сходимости как согласованных, так и универсальных рядов является сложной задачей, и для некоторых классов уравнений эта проблема остается нерешенной. Например, таким уравнением является одномерное уравнение нестационарной фильтрации. Поэтому далее рассматриваются специальные ряды, сходимость которых удается исследовать для уравнений этого типа. Оказывается, что в этом случае в качестве нулевого члена ряда следует взять известное точное решение.

4. Специальные ряды, согласованные с точным решением

Приведем схему построения таких рядов для следующего нелинейного уравнения:

$$u_t = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\left(c_m u^2\right), \quad c_m = \mathrm{const}, \quad m \geq 1. \tag{4.1}$$

При $m = 1$ это уравнение является одномерным уравнением нестационарной фильтрации. Заметим, что уравнение (4.1) принадлежит также к классу уравнений (3.3) и допускает построение формального решение в виде согласованного ряда (3.2). Однако, доказать сходимость согласованного ряда не удается.

Поэтому были предложены ряды, для коэффициентов которых удалось получить оценки, гарантирующие сходимость этих рядов. Рассмотрим построение таких рядов для уравнения (4.1) с $m = 1$, $c_1 = 1/2$ и некоторым известным точным решением $S_0(x,t)$. Справедливо

Утверждение 4. *Если для точного решения $S_0(x,t)$ существует базисная функция $R(x,t)$, удовлетворяющая условию (3.1) с $k_0 \geq 3$ и условию*

$$S_0(x,t)R^{k_0-2} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t)R^i, \quad A_i(t) \in C^1[0,T], \quad A_0(t) \neq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.3}$$

то ряд

$$u(x,t) = S_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)R^n(x,t) \tag{4.4}$$

является формальным решением уравнения (4.1).

Точным решением для уравнения (4.1) с $m = 1$, $c_1 = 1/2$ является

$$S_1(x,t) = -\frac{1}{t+C}\left(\frac{x^2}{6} + Bx + \frac{3}{2}B^2\right), \quad C, B = \mathrm{const}. \tag{4.5}$$

При $B = 0$ базисная функция $R_1(x,t) = (x^2 + f(t))^{-1}$, является согласованной с решением $S_1(x,t)$. В этом случае условие (4.3), имеет вид

$$S_1R_1 = -\frac{1}{6(t+C)} + \frac{1}{6(t+C)}R_1.$$

При $B \neq 0$ в качестве базисных функций можно взять универсальные базисные функции $Q_{1k}(x,t) = (x + f(t))^{-1/k}$ с $k \geq 1$, для которых условие (4.3) имеет вид

$$S_1Q_{1k} = -\frac{1}{6(t+C)} + \varphi_1(t)Q_{1k}^k + \varphi_2(t)Q_{1k}^{2k}.$$

Здесь $\varphi_1(t) = (f + 3B(t+C))/3/(t+C)$, $\varphi_2(t) = -[(f + 3B(t+C))^2 - 1.5B^2(t+C)^2 + 9B^2(t+C)]/6/(t+C)$.

Определение 3. *Ряд вида (4.4) и соответствующие базисные функции будем называть согласованными с точным решением.*

Исследуем сходимость ряда (4.4) для уравнения (4.1) с $m = 1$, $c_1 = 1/2$ и начальными данными

$$u_0(x) = -\frac{1}{6C}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n0} R^n(x,0), \quad \alpha_{n0} = \mathrm{const}. \tag{4.6}$$

Решение задачи Коши (4.1), (4.6) будем искать в виде ряда (4.4) с $R(x,t) \equiv R_1(x,t)$, согласованного с точным решением $S_0(x,t) = -\dfrac{x^2}{6(t+C)}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) $C \geq C_0 > 0$;

2) $|\alpha_{n0}| \leq K\dfrac{M^n}{4n^2}$, $n \geq 1$, $K > 0$, $M > 2$;

3) $f(t) \in C^1[0,\infty)$, $0 \leq f(t) \leq M$, $|f'(t)| \leq M$.

Тогда существует класс положительных начальных данных, для которого ряд (4.4) равномерно сходится к положительному решению задачи (4.1), (4.6) на множестве $G_{MM_1} = \{(x,t) : M \leq |x| \leq M_1,\ 0 \leq t \leq T, \quad T > 0\}$.

Доказательство теоремы приведено в работе [17].

Замечание 9. *Представления решений, аналогичные тем, котрые были получены в теореме 2, справедливы и для универсальных базисных функций* $Q_{1k}(x,t)$, *согласованных с точным решением* $S_1(x,t)$.

В этом случае ряды вида

$$u(x,t) = -\frac{1}{t+C}\left(\frac{x^2}{6} + Bx + \frac{3}{2}B^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) Q_{1k}^n(x,t)$$

являются решениями уравнения (4.1).

Утверждение 5. *С помощью базисной функций* $Q_{11}(x,0)$ *можно равномерно по* x *приблизить любую начальную функцию* $u_0(x) \in C[a,b]$, *если* $0 < a < b < \infty$.

Это утверждение следует из первой теоремы Веерштрасса [1, с. 38], если положить $f(0) = 0$.

Таким образом, для уравнения (4.1) получены новые классы решений с функциональным произволом в виде специальных рядов, в которых в качестве нулевого члена выбирается известное точное решение. Изложенный подход может быть обобщен и на многомерный случай [3, 18].

Список литературы

[1] Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.

[2] Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных средах. М., 1983.

[3] Ваганова Н. А. Численно-аналитический метод решения двумерного уравнения фильтрации с помощью специальных рядов. Тр. Всеросс. конф. “Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности”. Ростов-на-Дону, 2000. С. 36–40.

[4] Васин В. В., Сидоров А. Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. №7. С. 13–27.

[5] Коковихина О. В., Сидоров А. Ф. Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1984. Т. 15, №3. С. 72–84.

[6] Корзунин Л. Г., Филимонов М. Ю. О представлении решения уравнения Кортевега-де Фриза в виде специальных рядов. Там же. 1985. Т. 16, №5. С. 57–67.

[7] Сидоров А. Ф. О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1975. Т. 6, №4. С. 106–115.

[8] Титов С. С. Пространственно-периодические решения полной системы Навье — Стокса. Докл. РАН. 1999. Т. 365, №6. С. 761–763.

[9] Титов С. С. Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, №10. С. 1844–1850.

[10] Титов С. С. Представление решения многомерного симметричного уравнения фильтрации газа в виде логарифмического ряда // Динамика многофазных сред. Новосибирск, 1984. С. 132–144.

[11] Филимонов М. Ю. Специальные ряды и их приложения. Тр. VIII Всеросс. шк.–сем. “Современные проблемы математического моделирования”. Ростов-на-Дону, 1999. С. 231–239.

[12] Филимонов М. Ю. Применение специальных рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными в неограниченных областях // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, №11. С. 1538–1543.

[13] Филимонов М. Ю. Применение обобщенных базисных функций и кратных рядов для разложения решений нелинейных уравнений. Числ. и аналитические методы моделирования в механике сплош. сред. Свердловск, 1988. С. 54–65.

[14] Филимонов М. Ю. О некоторых конструкциях специальных рядов, согласованных с данным нелинейным уравнением // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3(20), №4. С. 151–157.

[15] Филимонов М. Ю. О представлении решений смешанных задач для нелинейного волнового уравнения специальными двойными рядами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №9. С. 1625–1631.

[16] Филимонов М. Ю. Представление специальными рядами решений начально-краевыхзадач нелинейных уравнений в сложных областях. Проблемы теоретической и прикладной математики. Тр. 32-й Региональной молодежной конф. Екатеринбург, 2001. С. 162–166.

[17] Филимонов М. Ю. Применение точных решений нелинейных уравнений с частными производными для построения новых классов решений с помощью специальных рядов. Тр. Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения.” Красноярск, 2000. С. 231–234.

[18] Филимонов М. Ю. Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений двумерного уравнения фильтрации. Тр. Всеросс. конф. “Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности”. Ростов-на-Дону, 2000. С. 216–221.

[19] Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling. 1993. Vol. 8, No. 2. P. 101–125.