В последние годы среди фундаментальных задач механики и физики деформируемых тел на первое место вышла проблема определяющих соотношений, описывающих поведение определенного класса материалов и дополняющих систему законов сохранения до замкнутой системы. В данной работе для материалов, обладающих неоднородностью структуры, которая феноменологически проявляется в его чувствительности к виду напряженного состояния, подход к разработке моделей изотропных сред распространяется на случай некоторых анизотропных.

Общее представление функции энергии дается в виде

$$W(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \overline{a}_{ln} L_n^{\alpha}(r) \cdot \Xi_K^l(\varepsilon) \tag{1}$$

где $L_n^{\alpha}(r)$ – многочлены Лаггера с $\alpha \geq 2$, $\Xi_K^l(\varepsilon)$ – ортогональные базисные функции группы вращений n-мерного пространства $SO(n)$ [1]. С учетом представления многочленов Лаггера, изотропности среды и предположения о малости компонент тензора деформаций функция энергии представима в виде [2, 3]:

$$W(\varepsilon) = r^2 \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^{(m)} Y_l^m \tag{2}$$

где $r = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}$.

Рассмотрим транстропные и ортотропные гетерогенно-упругие среды. Функция (2) должна быть инвариантна относительно группы преобразований данных сред. Транстропная среда имеет ось вращений, в качестве которой возьмем координатную ось ε_3, поэтому (2) должна быть инвариантна относительно поворотов вокруг этой оси на угол $\pi/2$. Преобразуем (2) по правилу

$$\varepsilon_k = q_{kp}^2 \varepsilon'_p,\ q_{ij} = \cos\left(I_i, I'_j\right),$$

где I_i, I'_j – векторы ортонормированного базиса, соответственно, исходной и новой систем координат и наложим требование неизменности формы (2). Рассматривая первые слагаемые (2) при $l = 0,1,2,3$, получим следующие ограничения на коэффициенты представления потенциала транстропной среды:

$$a_2^{(2)} = 0,\ a_2^{(-1)} = a_2^{(1)},\ a_3^{(2)} = 0,\ a_3^{(-1)} = a_3^{(1)},\ a_3^{(3)} = -a_3^{(-3)} \tag{3}$$

Вводя обозначения коэффициентов для транстропного материала

$$a_0^{(0)} = A_0,\ a_1^{(0)} = A_1,\ a_1^{(1)} = A_2,\ a_2^{(0)} = A_3,\ \frac{3}{2}a_2^{(1)} = A_4,$$
$$3a_2^{(-2)} = A_5,\ a_3^{(0)} = A_6,\ a_3^{(1)} = A_7,\ 15a_3^{(3)} = A_8,\ 5a_3^{(-2)} = A_9,$$

получаем следующую форму функции $W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$:

транстропный материал:

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) &= A_0 I_2 + A_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{I_2} + A_1\varepsilon_3\sqrt{I_2} + A_3\varepsilon_3^2 - \tfrac{1}{2}A_3\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right) + \\ &+ 2A_4(\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3) + 2A_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + A_6\tfrac{\varepsilon_3^3}{\sqrt{I_2}} + \left(A_8 - \tfrac{3}{2}A_7\right)\tfrac{\left(\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3\right)}{\sqrt{I_2}} + \\ &+ 3\left(-\tfrac{1}{2}A_7 - A_8\right)\tfrac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right)}{\sqrt{I_2}} - \tfrac{3}{2}A_6\tfrac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right)}{\sqrt{I_2}} + 6A_7\tfrac{\left(\varepsilon_3^2\varepsilon_1+\varepsilon_3^2\varepsilon_2\right)}{\sqrt{I_2}} + \\ &+ A_9\tfrac{1}{\sqrt{I_2}}\left(I_1^3 - I_1 I_2 + 2I_3\right) + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

ортотропный материал:

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) &= C_0 I_2 + (C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\varepsilon_3)\sqrt{I_2} + \left(C_{11}\varepsilon_1^2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{33}\varepsilon_3^2 + \right.\\ &\left. + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2C_{23}\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2C_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3\right) + \tfrac{1}{\sqrt{I_2}}\left(C_{111}\varepsilon_1^3 + C_{222}\varepsilon_2^3 + C_{333}\varepsilon_3^3 + \right.\\ &\left. + 3C_{122}\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 3C_{133}\varepsilon_1\varepsilon_3^2 + 3C_{211}\varepsilon_2\varepsilon_1^2 + 3C_{233}\varepsilon_2\varepsilon_3^2 + 3C_{311}\varepsilon_3\varepsilon_1^2 + 3C_{322}\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right) + \\ &+ C_{123}\tfrac{1}{\sqrt{I_2}}\left(I_1^3 - I_1 I_2 + 2I_3\right) + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Рассматривая только выписанные члены и налагая требование дважды дифференцируемости W в нуле, можно получить классические потенциалы для рассматриваемых сред в главных осях [4]. Невыписанные члены в разложении (4) – (5) отражают более тонкие детали поведения функции W.

Определяющие уравнения связи напряжений с деформациями имеют следующее выражение:
транстропный материал:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathrm{A}_2\sqrt{\mathrm{I}_2} + \mathrm{A}_2\tfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_1}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} + (\mathrm{A}_1 - 3\mathrm{A}_6)\tfrac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} + (2\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_3)\cdot\varepsilon_1 + 2\mathrm{A}_4\varepsilon_3 + \\ &+ 2\mathrm{A}_5\varepsilon_2 - \mathrm{A}_6\tfrac{\varepsilon_3^3\varepsilon_1}{\mathrm{I}_2\sqrt{\mathrm{I}_2}} + +3\left(\mathrm{A}_8 - \tfrac{3}{2}\mathrm{A}_7\right)\tfrac{\varepsilon_1^2}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} - \left(\mathrm{A}_8 - \tfrac{3}{2}\mathrm{A}_7\right)\tfrac{\left(\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3\right)\varepsilon_1}{\mathrm{I}_2\sqrt{\mathrm{I}_2}} + \\ &+ \left(-\tfrac{3}{2}\mathrm{A}_7 - 3\mathrm{A}_8\right)\tfrac{\left(2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\right)}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} - \left(-\tfrac{3}{2}\mathrm{A}_7 - 3\mathrm{A}_8\right)\tfrac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_1}{\mathrm{I}_2\sqrt{\mathrm{I}_2}} + \\ &+ \tfrac{3}{2}\mathrm{A}_6\tfrac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right)\varepsilon_1}{\mathrm{I}_2\sqrt{\mathrm{I}_2}} + 6\mathrm{A}_7\tfrac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} - 6\mathrm{A}_7\tfrac{\left(\varepsilon_3^2\varepsilon_1+\varepsilon_3^2\varepsilon_2\right)\varepsilon_1}{\mathrm{I}_2\sqrt{\mathrm{I}_2}} - \\ &- \mathrm{A}_9\varepsilon_1\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right) + \mathrm{A}_9\tfrac{1}{\sqrt{\mathrm{I}_2}}\left(3\mathrm{I}_1\xi - \sqrt{\mathrm{I}_2} + 6\tfrac{\varepsilon_1^2}{\sqrt{\mathrm{I}_2}} - 2\xi\varepsilon_1\right) + \ldots \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = A_2\sqrt{I_2} + A_2\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_2}{\sqrt{I_2}} + (A_1 - 3A_6)\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + (2A_0 - A_3)\cdot\varepsilon_2 + 2A_4\varepsilon_3 +$$
$$+ 2A_5\varepsilon_1 - A_6\frac{\varepsilon_3^3\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}} + 3\left(A_8 - \tfrac{3}{2}A_7\right)\frac{\varepsilon_2^2}{\sqrt{I_2}} - \left(A_8 - \tfrac{3}{2}A_7\right)\frac{\left(\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3\right)\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}} +$$
$$+ \left(-\tfrac{3}{2}A_7 - 3A_8\right)\frac{\left(2\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1^2\right)}{\sqrt{I_2}} - \left(-\tfrac{3}{2}A_7 - 3A_8\right)\frac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}} + \qquad (6)$$
$$+ \tfrac{3}{2}A_6\frac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right)\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}} + 6A_7\frac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{I_2}} - 6A_7\frac{\left(\varepsilon_3^2\varepsilon_1+\varepsilon_3^2\varepsilon_2\right)\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}} -$$
$$- A_9\varepsilon_2\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right) + A_9\frac{1}{\sqrt{I_2}}\left(3I_1\xi - \sqrt{I_2} + 6\frac{\varepsilon_2^2}{\sqrt{I_2}} - 2\xi\varepsilon_2\right) + \ldots$$

$$\sigma_3 = A_1\sqrt{I_2} + A_2\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + (A_1 + 3A_6)\frac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{I_2}} + 2A_4(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2(A_0 + A_3)\cdot\varepsilon_3 -$$
$$- A_6\frac{\varepsilon_3^4}{I_2\sqrt{I_2}} - \left(A_8 - \tfrac{3}{2}A_7\right)\frac{\left(\varepsilon_1^3+\varepsilon_2^3\right)\varepsilon_3}{I_2\sqrt{I_2}} - \tfrac{3}{2}A_6\frac{\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)}{\sqrt{I_2}} + 6A_7\frac{(2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_2\varepsilon_3)}{\sqrt{I_2}} -$$
$$- \left(-\tfrac{3}{2}A_7 - 3A_8\right)\frac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_3}{I_2\sqrt{I_2}} + \tfrac{3}{2}A_6\frac{\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right)\varepsilon_3}{I_2\sqrt{I_2}} - 6A_7\frac{\left(\varepsilon_3^2\varepsilon_1+\varepsilon_3^2\varepsilon_2\right)\varepsilon_3}{I_2\sqrt{I_2}} -$$
$$- A_9\varepsilon_3\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right) + A_9\frac{1}{\sqrt{I_2}}\left(3I_1\xi - \sqrt{I_2} + 6\frac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{I_2}} - 2\xi\varepsilon_3\right) + \ldots$$

ортотропный материал:

$$\sigma_1 = C_1\sqrt{I_2} + \frac{(C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+C_3\varepsilon_3)\varepsilon_1}{\sqrt{I_2}} + 2(C_{11}+C_0)\cdot\varepsilon_1 + 2C_{12}\varepsilon_2 + 2C_{13}\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_1}{I_2\sqrt{I_2}}\left(C_{111}\varepsilon_1^3 +\right.$$
$$+ C_{222}\varepsilon_2^3 + C_{333}\varepsilon_3^3 + 3C_{122}\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 3C_{133}\varepsilon_1\varepsilon_3^2 + 3C_{211}\varepsilon_2\varepsilon_1^2 + 3C_{233}\varepsilon_2\varepsilon_3^2 + 3C_{311}\varepsilon_3\varepsilon_1^2 +$$
$$\left.+ 3C_{322}\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right) + \frac{1}{\sqrt{I_2}}\left(3C_{111}\varepsilon_1^2 + 3C_{122}\varepsilon_2^2 + 3C_{133}\varepsilon_3^2 + 6C_{211}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 6C_{311}\varepsilon_3\varepsilon_1\right) -$$
$$- C_{123}\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right)\cdot\varepsilon_1 + C_{123}\left(3I_1\xi - \sqrt{I_2} + 6\frac{\varepsilon_1^2}{\sqrt{I_2}} - 2\xi\varepsilon_1\right) + \ldots$$

$$\sigma_2 = C_2\sqrt{I_2} + \frac{(C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+C_3\varepsilon_3)\varepsilon_2}{\sqrt{I_2}} + 2C_{12}\varepsilon_1 + 2(C_{22}+C_0)\cdot\varepsilon_2 + 2C_{23}\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_2}{I_2\sqrt{I_2}}\left(C_{111}\varepsilon_1^3 +\right.$$
$$+ C_{222}\varepsilon_2^3 + C_{333}\varepsilon_3^3 + 3C_{122}\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 3C_{133}\varepsilon_1\varepsilon_3^2 + 3C_{211}\varepsilon_2\varepsilon_1^2 + 3C_{233}\varepsilon_2\varepsilon_3^2 + 3C_{311}\varepsilon_3\varepsilon_1^2 +$$
$$\left.+ 3C_{322}\varepsilon_2^2\varepsilon_3\right) + \frac{1}{\sqrt{I_2}}\left(3C_{222}\varepsilon_2^2 + 3C_{211}\varepsilon_1^2 + 3C_{233}\varepsilon_3^2 + 6C_{122}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 6C_{322}\varepsilon_3\varepsilon_2\right) -$$
$$- C_{123}\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right)\cdot\varepsilon_2 + C_{123}\left(3I_1\xi - \sqrt{I_2} + 6\frac{\varepsilon_2^2}{\sqrt{I_2}} - 2\xi\varepsilon_2\right) + \ldots$$

(7)

$$\sigma_3 = C_3\sqrt{I_2} + \frac{(C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\varepsilon_3)\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + 2C_{13}\varepsilon_1 + 2C_{23}\varepsilon_2 + 2(C_{33} + C_0)\cdot\varepsilon_3 - \frac{\varepsilon_3}{I_2\sqrt{I_2}}\Big(C_{111}\varepsilon_1^3 +$$
$$+ C_{222}\varepsilon_2^3 + C_{333}\varepsilon_3^3 + 3C_{122}\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + 3C_{133}\varepsilon_1\varepsilon_3^2 + 3C_{211}\varepsilon_2\varepsilon_1^2 + 3C_{233}\varepsilon_2\varepsilon_3^2 + 3C_{311}\varepsilon_3\varepsilon_1^2 +$$
$$+ 3C_{322}\varepsilon_2^2\varepsilon_3\Big) + \frac{1}{\sqrt{I_2}}\Big(3C_{333}\varepsilon_3^2 + 3C_{322}\varepsilon_2^2 + 3C_{311}\varepsilon_1^2 + 6C_{133}\varepsilon_1\varepsilon_3 + 6C_{233}\varepsilon_3\varepsilon_2\Big) -$$
$$- C_{123}\left(\xi^3 - \xi + 2\eta^3\right)\cdot\varepsilon_3 + C_{123}\left(3I_1\xi - \sqrt{I_2} + 6\frac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{I_2}} - 2\xi\varepsilon_3\right) + \ldots$$

Из (6) и (7) можно выделить простейшие определяющие соотношения для рассматриваемых сред:

трансверсально-изотропный материал:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= A_2\sqrt{I_2} + A_2\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_1}{\sqrt{I_2}} + A_1\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + (2A_0 - A_3)\cdot\varepsilon_1 + \\
&\quad + 2A_4\varepsilon_3 + 2A_5\varepsilon_2 \\
\sigma_2 &= A_2\sqrt{I_2} + A_2\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_2}{\sqrt{I_2}} + A_1\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + (2A_0 - A_3)\cdot\varepsilon_2 + \\
&\quad + 2A_4\varepsilon_3 + 2A_5\varepsilon_1 \\
\sigma_3 &= A_1\sqrt{I_2} + A_2\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot\varepsilon_3}{\sqrt{I_2}} + A_1\frac{\varepsilon_3^2}{\sqrt{I_2}} + 2A_4(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\
&\quad + 2(A_0 + A_3)\cdot\varepsilon_3
\end{aligned} \tag{8}$$

ортотропный материал:

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= 2(C_0 + C_{ii})\cdot\varepsilon_i + C_i\sqrt{I_2} + (C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + C_3\varepsilon_3)\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{I_2}} + \\
&\quad + 2C_{ij}\varepsilon_j + 2C_{ik}\varepsilon_k \\
&\quad\; i \neq j \neq k \neq i
\end{aligned} \tag{9}$$

Соотношения (8) – (9) позволяют описать главную особенность поведения разномодульных анизотропных материалов – расхождения диаграмм деформирования при одноосном растяжении-сжатии в направлении главных осей.

Таким образом, получены потенциалы напряжений и определяющие уравнения транстропной и ортотропной сред для случая, когда внешние усилия, и, соответственно, главные оси тензоров напряжений и деформаций направлены по главным осям симметрии, в форме разложения в ряд Фурье. Полученные функции совпадают при требовании дважды дифференцируемости в нуле с классическими потенциалами для соответствующих сред. Даны простейшие определяющие соотношения рассматриваемых сред. Определяющие соотношения можно, используя шестимерное представление базисных функций, распространить на более общий случай полного пространства деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965. – 588 с.
2. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // ДАН СССР. – 1992. – Т. 322. № 1. – С. 57-60.
3. Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // ПММ. – 1993. – Т. 57. Вып. 5. – С. 153-159.
4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд-е 2-е. – М.: Наука, 1977. – 416 с.