РАСЧЕТ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ПЕНСИОННОГО ФОНДА В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С. Н. Авдеенко, В. В. Домбровский
Томский государственный университет, Россия
e-mail: Dombrovs@ef.tsu.ru

We consider one of the pension system variants, which is based solely on the superannuation contributions. In order to estimate the individual pension fund and extent of pension we use both an ordinary (classical) interval arithmetic and combination of ordinary and generalized ones. Comparative analysis of the results have been carried out.

Введение

В настоящее время в России осуществляется переход от распределительной пенсионной системы к накопительной. В связи с этим становится актуальной проблема оценки размера полного пенсионного фонда, накопленного отдельным индивидуумом в течении всей трудовой деятельности, и размера пенсии, которую этот индивидуум будет получать после окончания активной трудовой деятельности.

В работе [5] исследована зависимость индивидуального пенсионного фонда от основных параметров накопления (ставка налога в пенсионный фонд, доходность пенсионного фонда, темп изменения заработной платы работника). При этом предполагалось, что на протяжении всего срока накопления пенсионного фонда эти параметры остаются постоянными. Однако в реальной ситуации, поскольку срок накопления большой (порядка 40 лет), параметры изменяются. Но всегда можно с достаточной долей достоверности указать границы, в которых эти параметры будут находиться. В этом случае адекватным математическим аппаратом для расчета размера индивидуального пенсионного фонда могут служить методы интервального анализа [2, 4, 6–10]. Применение интервального анализа позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в некоторых интервалах.

В работах [1, 3, 10] предложено использовать методы обычной и обобщенной интервальной арифметики для анализа потоков платежей и инвестиционных проектов.

В данной работе интервальные методы применяются для оценки размера индивидуального пенсионного фонда. Используется как обычная интервальная арифметика, так и сочетание обычной и обобщенной. Выведены формулы для вычисления размера индивидуального пенсионного фонда и размера пенсии. Проведен численный анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи

Предположим, что каждый человек в процессе всей своей трудовой деятельности производит отчисления определенной части своего дохода α ($\alpha < 1$) на свой личный пенсионный счет. Пусть период трудовой деятельности составляет N лет. На протяжении всех этих лет накапливаемая на пенсионном счете сумма капитализируется, и каждый год на текущий остаток начисляются проценты по годовой ставке r. Назовем ее ставкой доходности пенсионного фонда. В частности, если средства хранятся в банке, то r — ставка банковского процента.

Пусть трудовая деятельность начинается в момент времени $n = 0$. В момент $n = 1$ человек получает доход v_1. Отчисления на личный пенсионный счет составляют αv_1. Следовательно, на пенсионном счете в момент времени $n = 1$ остаток равен

$$P_1 = \alpha v_1.$$

В момент $n = 2$ на остаток счета начисляются проценты по ставке доходности пенсионного фонда r, и производятся отчисления с дохода, полученного в этот период, по ставке α. Остаток на счете будет

$$P_2 = P_1(1 + r) + \alpha v_2 = \alpha v_1(1 + r) + \alpha v_2.$$

Аналогично рассчитываем остатки на счете до момента N. Остаток на счете к концу трудового периода будет равен:

$$P_N = \alpha \sum_{k=0}^{N} (1+r)^{N-k} v_k. \tag{1}$$

Формула (1) определяет размер индивидуального пенсионного фонда к концу трудовой деятельности человека. По этой формуле можно производить расчеты только в том случае, когда все параметры (процент отчислений, доходность пенсионного фонда, доход субъекта) точно определены. Однако в реальных расчетах можно лишь предполагать в каких интервалах эти параметры будут находиться. В этом случае естественно воспользоваться методами интервального анализа. Как известно, существует несколько способов представления интервальных величин: обычная интервальная арифметика [2, 4, 6, 9, 10], обобщенная интервальная арифметика [7], арифметика Каухера [8].

В работе используются методы обычной и обобщенной интервальной арифметики. Описание обычной интервальной арифметики дано в известных монографиях [2, 4, 6, 9, 10]. Обобщенная интервальная арифметика менее известна. Поэтому приведем основные понятия обобщенной интервальной арифметики, которые понадобятся в дальнейшем.

2. Обобщенная интервальная арифметика [7]

Рассмотрим интервал X шириной $2s$. Обозначим: x — середина интервала X. Тогда любая точка в интервале X может быть представлена как $x+u$ для некоторого значения u, удовлетворяющего условию: $-s \le u \le s$. Следуя [7], будем записывать $X = x+u$, несмотря на то,что X — интервал, а $x+u$ — некоторое число из этого интервала. Согласно [7], интервальное представление $f(X)$ любой функции записывается в форме: $f(X) = A + Bu$, где A и B — интервалы. Арифметические действия с интервальными функциями в обобщенной интервальной арифметике производятся согласно следующим правилам. Пусть $g(X)$ интервальная функция, представленная в виде: $g(X) = C + Du$, где C и D — интервалы. Тогда сложение и вычитание:

$$f(x) \pm g(x) = (A+Bu) \pm (C+Du) = (A \pm C) + (B \pm D)u.$$

Умножение:

$$f(X) \cdot g(X) = (A+Bu) \cdot (C+Du) = AC + (AD+BC) \cdot u + BDu^2.$$

Ограничиваем u^2 интервалом $\left[0, s^2\right]$ и окончательно получаем $h(X) = f(X) \cdot g(X) = E + Fu$, где

$$E = AC + BD\left[0, s^2\right], \quad F = AD + BC.$$

Деление:

$$h(X) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+Bu}{C+Du} = \frac{A}{C} + \frac{BC-AD}{C(C+Du)} \cdot u.$$

В знаменателе заменим u интервалом $[-s, s]$. Получим $h(X) = E + Fu$, где

$$E = \frac{A}{C}, \quad F = \frac{BC-AD}{C \cdot (C + D[-s,s])}.$$

Если функции f и g зависят от n интервальных переменных X_i с шириной $2s_i$ соответственно, $X_i = x_i + u_i$, где $u_i \in \left[-s_i, s_i\right]$, то они представляются в форме:

$$f(X) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i u_i, \quad g(X) = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i u_i,$$

где A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — интервалы. Результатом арифметических действий с этими функциями будет следующая функция

$$h(X) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,$$

где для сложения:

$$C_i = A_i + B_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

для вычитания:

$$C_i = A_i - B_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

для умножения:

$$C_0 = A_0 B_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \left[0, s_i^2\right],$$

$$C_i = A_0 B_i + A_i B_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_i B_j \left[-s_j, s_j\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

для деления:

$$C_0 = A_0 / B_0, \quad C_i = \frac{B_0 A_i - A_0 B_i}{D},$$

где

$$D = B_0 \cdot \left(B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot \left[-s_i, s_i\right] \right).$$

Как только получаем результат как функцию, линейно зависящую от $u_1, u_2, \ldots, u_n$, мы "доводим" ее до интервала заменой каждой переменной u_i на ограничивающий ее интервал $[-s_i, s_i]$.

Заметим, что по правилу деления интервалов имеет место свойство: $\frac{A}{A} = 1$ для $A \in I(R)$.

3. Расчет пенсионного фонда в обычной интервальной арифметике

Предположим, что заданы интервалы среднегодового дохода работника в каждом году $v_{(n)} = \left[\underline{v}_{(n)}, \overline{v}_{(n)}\right]$, отчислений в пенсионный фонд $\alpha = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ и доходности пенсионного фонда $r = [\underline{r}, \overline{r}]$ (здесь использовано следующее обозначение: если X — интервал, то $\underline{X}$ и $\overline{X}$ — левая и правая граничные точки, $\underline{X} \leq \overline{X}$).

Тогда процесс формирования фонда можно описать следующим образом. В момент времени $n = 1$ работник получает доход $\left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right]$, отчисления равны $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right]$, следовательно, остаток на счете равен

$$P_1 = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right].$$

В момент времени $n = 2$ на остаток P_1 начисляются проценты по интервальной ставке$[\underline{r}, \overline{r}]$, и производятся отчисления по ставке $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Получаем остаток

$$P_2 = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right] (1 + [\underline{r}, \overline{r}]) + [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\underline{v}_{(2)}, \overline{v}_{(2)}\right]. \tag{2}$$

Поскольку доходность пенсионного фонда и начальная заработная плата положительны, то по закону субдистрибутивности операции сложения в обычной интервальной арифметике [2, 4, 6, 9, 10] выражение (2) можно записать следующим образом

$$P_2 = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left(\left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right] (1 + [\underline{r}, \overline{r}]) + \left[\underline{v}_{(2)}, \overline{v}_{(2)}\right] \right).$$

Аналогично получаем остаток на пенсионном счете в третьем периоде

$$P_3 = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left(\left[\underline{v}_{(1)}, \overline{v}_{(1)}\right] (1 + [\underline{r}, \overline{r}])^2 + \left[\underline{v}_{(2)}, \overline{v}_{(2)}\right] (1 + [\underline{r}, \overline{r}]) \left[\underline{v}_{(3)}, \overline{v}_{(3)}\right] \right).$$

В общем случае для k-го периода получаем остаток, равный

$$P_k = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \sum_{i=1}^{k} \left[\underline{v}_{(i)}, \overline{v}_{(i)}\right] (1 + [\underline{r}, \overline{r}])^{k-i}. \tag{3}$$

Учитывая правила арифметических действий в обычной интервальной арифметике, выражение (3) можно переписать в следующем виде

$$P_k = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\sum_{i=1}^{k} \underline{v}_{(i)} (1 + \underline{r})^{k-i}, \sum_{i=1}^{k} \overline{v}_{(i)} (1 + \overline{r})^{k-i} \right]. \tag{4}$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть доход работника на протяжении всей трудовой деятельности не имеет определенной тенденции к изменению, и принадлежит интервалу $[\underline{v}, \overline{v}]$. Тогда формулу (4) можно записать в следующем виде

$$P_k = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\underline{v} \sum_{i=1}^{k} (1+\underline{r})^{k-i}, \overline{v} \sum_{i=1}^{k} (1+\overline{r})^{k-i} \right]. \tag{5}$$

Обозначим через $A_{k,t}$ размер пенсионного фонда к концу k-го периода в единицах заработной платы t-го периода, $A_{k,t} = P_k / v^{(t)}$. Тогда с учетом (5) размер пенсионного фонда к концу трудового стажа в единицах заработной платы вычисляется по формуле

$$A_N = \left[\underline{\alpha} \frac{\underline{v}(1+\underline{r})^N - 1}{\overline{v}\underline{r}}, \overline{\alpha} \frac{\overline{v}(1+\overline{r})^N - 1}{\underline{v}\overline{r}} \right] \tag{6}$$

2. Рассмотрим случай, когда доход работника меняется экспоненциально с темпом q. Так как темп изменения дохода также точно не известен,то предположим, что $q \in [\underline{q}, \overline{q}]$. Тогда зарплату работника в любой период k можно представить в виде

$$v_{(k)} = (1 + [\underline{q}, \overline{q}])^{k-1} [\underline{v}, \overline{v}]. \tag{7}$$

Подставив выражение (7) в формулу полного пенсионного фонда (4), получим

$$\begin{aligned} P_k &= [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\sum_{i=1}^{k} \underline{v}(1+\underline{q})^{i-1}(1+\underline{r})^{k-i}, \sum_{i=1}^{k} \overline{v}(1+\overline{q})^{i-1}(1+\overline{r})^{k-i} \right] = \\ &= \left[\underline{\alpha v} \frac{(1+\underline{r})^k - (1+\underline{q})^k}{\underline{r} - \underline{q}}, \overline{\alpha v} \frac{(1+\overline{r})^k - (1+\overline{q})^i}{\overline{r} - \overline{q}} \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Размер пенсионного фонда, накопленного работником к концу трудового стажа, в единицах заработной платы последнего периода имеет вид

$$A_{N,N} = \left[\underline{\alpha v} \frac{(1+\underline{r})^N - (1+\underline{q})^N}{\overline{v}(1+\overline{q})^{N-1}(\underline{r} - \underline{q})}, \overline{\alpha v} \frac{(1+\overline{r})^N - (1+\overline{q})^N}{\underline{v}(1+\underline{q})^{N-1}(\overline{r} - \overline{q})} \right]. \tag{9}$$

Размер пенсионного фонда в единицах заработной платы первого периода вычисляется по следующей формуле

$$A_{N,1} = \left[\underline{\alpha v} \frac{(1+\underline{r})^N - (1+\underline{q})^N}{\overline{v}(\underline{r} - \underline{q})}, \overline{\alpha v} \frac{(1+\overline{r})^N - (1+\overline{q})^N}{\underline{v}(\overline{r} - \overline{q})} \right]. \tag{10}$$

В табл. 1, 2 представлены численные расчеты размера пенсионного фонда в зависимости от исходных параметров.

Т а б л и ц а 1

Интервал полного пенсионного фонда в единицах заработной платы первого периода и его ширина в зависимости от ширины интервалов входных параметров

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Полный ПФ в единицах первой з/платы		Ширина интервала ПФ
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{A}_{N,1}$	$\overline{A}_{N,1}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	5,520	164,984	159,463
85	120	15	30	3	9	-3	4	4,888	186,335	181,446
80	100	5	25	3	9	-3	4	1,840	137,487	135,646
80	100	15	30	2	10	-3	4	4,339	206,035	201,695
80	100	15	30	3	9	-10	4	2,821	164,984	162,162

Таблица 2

Интервал полного пенсионного фонда в единицах заработной платы последнего периода и его ширина в зависимости от ширины интервалов входных параметров

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Полный ПФ в единицах последней з/платы		Ширина интервала ПФ
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{A}_{N,N}$	$\overline{A}_{N,N}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	1,293	509,199	507,906
85	120	15	30	3	9	-3	4	1,145	575,096	573,95
80	100	5	25	3	9	-3	4	0,431	424,333	423,901
80	100	15	30	2	10	-3	4	1,016	635,896	634,879
80	100	15	30	3	9	-10	4	0,661	8137,09	8136,43

Расчеты, проведенные по формулам (9) и (10) (таблицы 1, 2), показывают, что при изменении ширины интервалов начальной заработной платы и темпа ее изменения интервал результата расширяется намного сильнее, чем этого можно было ожидать. Такое расширение является следствием одного из отрицательных свойств обычной интервальной арифметики. Это свойство заключается в том, что произвольный элемент $A = [a_1, a_2] \in I(R)$, у которого $a_1 \neq a_2$, не имеет обратного элемента ни по сложению, ни по умножению: $A - A \neq 0$, $\dfrac{A}{A} \neq 1$.

Для уменьшения влияния этого эффекта воспользуемся обобщенной интервальной арифметикой (g. i. a. – generalized interval arithmetic). Полное применение g. i. a. для вывода формул, аналогичных формулам (6), (9), (10), нецелесообразно, так как возведение интервала в степень в g. i. a. может приводить к необоснованному расширению интервала результата. Поэтому используем синтез двух интервальных арифметик — обычной и обобщенной.

4. Расчет пенсионного фонда на основе сочетания обычной и обобщенной интервальной арифметик

Обобщенную интервальную арифметику используем при вычислении размера пенсионного фонда в размерах заработной платы. Рассмотрим два случая.

1. Пусть доход работника принадлежит интервалу $[\underline{v}, \overline{v}]$ с постоянными границами. В этом случае, с учетом выражения (5), формула для расчета фонда в единицах заработной платы можно представить в виде

$$A_N = \frac{P_N}{[\underline{v}, \overline{v}]} = \frac{[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}][\underline{v}, \overline{v}]}{\underline{v}, \overline{v}]} \left[\frac{(1+\underline{r})^N}{\underline{r}}, \frac{(1+\overline{r})^N}{\overline{r}}\right]. \tag{11}$$

По правилам обобщенной интервальной арифметики

$$[\underline{v}, \overline{v}]/[\underline{v}, \overline{v}] = 1. \tag{12}$$

Следовательно,

$$A_N = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \left[\frac{(1+\underline{r})^N - 1}{\underline{r}}, \frac{(1+\overline{r})^N - 1}{\overline{r}}\right]. \tag{13}$$

2. Предположим, что границы интервала дохода изменяются экспоненциально. Для расчета размера пенсионного фонда в единицах заработной платы в этом случае используем выражение (8) для размера фонда. Тогда пенсионный фонд в размерах заработной платы последнего периода

$$A_{N,N} = \frac{P_N}{v_{(n)}} = \frac{[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}][\underline{v}, \overline{v}] \left[\sum_{i=1}^{N}(1+\underline{q})^{i-1}(1+\underline{r})^{N-1}, \sum_{i=1}^{N}(1+\overline{q})^{i-1}(1+\overline{r})^{N-1}\right]}{(1+[\underline{q}, \overline{q}])^{N-1}[\underline{v}, \overline{v}]}.$$

Учитывая соотношение (12), получим

$$A_{N,N} = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}][\sum_{i=1}^{N}[1+\underline{r}, 1+\overline{r}]^{N-1} \frac{[1+\underline{q}, 1+\overline{q}]^{i-1}}{[1+\underline{q}, 1+\overline{q}]^{N-1}} = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1+\underline{r}}{1+\overline{q}}, \frac{1+\overline{r}}{1+\underline{q}}\right]^i. \tag{14}$$

Пенсионный фонд в размерах заработной платы первого периода

$$A_{N,1} = \left[\underline{\alpha}\frac{(1+\underline{r})^N - (1+\underline{q})^N}{\underline{r}-\underline{q}}, \overline{\alpha}\frac{(1+\overline{r})^N - (1+\overline{q})^N}{\overline{r}-\overline{q}}\right]. \quad (15)$$

В табл. 3, 4 приведены результаты расчета интервалов полного пенсионного фонда и его ширина на основе сочетания обычной и обобщенной интервальной арифметик для тех же исходных данных, что и в табл. 1, 2.

Таблица 3

Интервал полного пенсионного фонда в единицах заработной платы первого периода и его ширина, рассчитанные на основе сочетания обычной и обобщенной интервальной арифметик, в зависимости от ширины интервалов входных параметров

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Полный ПФ в единицах первой з/платы		Ширина интервала ПФ
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{A}_{N,1}$	$\overline{A}_{N,1}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	6,901	131,987	125,086
85	120	15	30	3	9	-3	4	6,901	131,987	125,086
80	100	5	25	3	9	-3	4	2,300	109,989	107,688
80	100	15	30	2	10	-3	4	5,424	164,828	159,403
80	100	15	30	3	9	-10	4	3,526	131,987	128,460

Таблица 4

Интервал полного пенсионного фонда в единицах заработной платы последнего периода и его ширина, рассчитанные на основе сочетания обычной и обобщенной интервальной арифметик, в зависимости от ширины интервалов входных параметров

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Полный ПФ в единицах последней з/платы		Ширина интервала ПФ
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{A}_{N,N}$	$\overline{A}_{N,N}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	4,793	201,557	196,764
85	120	15	30	3	9	-3	4	4,793	201,557	196,764
80	100	5	25	3	9	-3	4	1,597	167,964	166,367
80	100	15	30	2	10	-3	4	4,070	264,168	260,098
80	100	15	30	3	9	-10	4	4,793	2057,32	2052,53

Результаты численных расчетов показывают, что применение обычной интервальной арифметики в комбинации с обобщенной позволяет существенно сузить интервалы результатов, по сравнению с обычной.

5. Применение сочетания обычной и обобщенной интервальной арифметик для оценки размера пенсии

Рассмотрим задачу оценки размера пенсии. После того как работник заканчивает свою трудовую деятельность и выходит на пенсию, начинается расходование накопленной на пенсионном счете суммы P_N, но на ее остаток продолжают начисляться проценты.

После первого года пенсионного периода на счету останется сумма

$$P_{N+1} = (1 + [\underline{r}, \overline{r}])P_N - [\underline{w}, \overline{w}],$$

где $[\underline{w}, \overline{w}]$ — размер среднегодовой пенсии. Предполагаем, что пенсия не имеет тенденции ни к росту, ни к падению и на протяжении всего пенсионного периода находится в этом интервале.

После второго года пенсии остаток на счете равен

$$P_{N+2} = ((1 + [\underline{r}, \overline{r}])P_N - [\underline{w}, \overline{w}])(1 + [\underline{r}, \overline{r}]) - [\underline{w}, \overline{w}] = (1 + [\underline{r}, \overline{r}])^2 P_N - [\underline{w}, \overline{w}](1 + (1 + [\underline{r}, \overline{r}])).$$

Пусть пенсионный период продолжается N_p лет. Тогда к концу пенсии остаток на пенсионном счете равен

$$P_{N+N_p} = P_N(1+[\underline{r},\overline{r}])^{N_p} - [\underline{w},\overline{w}]) \sum_{t=0}^{N_p-1} (1+[\underline{r},\overline{r}])^t.$$

Так как к концу пенсионного периода пенсионный фонд должен быть исчерпан полностью, то получаем, что наращенная сумма потока выплачиваемых пенсий к моменту времени N_p должна равняться накопленной сумме остатка на пенсионном счете P_N на этот же момент времени N_p, то есть, должно выполняться равенство.

$$P_N(1+[\underline{r},\overline{r}])^{N_p} = [\underline{w},\overline{w}]) \sum_{t=0}^{N_p-1} (1+[\underline{r},\overline{r}])^t. \tag{16}$$

Выразим отсюда интервальное значение пенсии. Умножим выражение (16) слева и справа на множитель

$$\frac{1}{\left[\dfrac{(1+\underline{r})^{N_p}-1}{\underline{r}}, \dfrac{(1+\overline{r})^{N_p}-1}{\overline{r}}\right]},$$

используя правила обобщенной интервальной арифметики. В результате для размера пенсии получим выражение

$$[\underline{w},\overline{w}] = P_N \frac{\left[(1+\underline{r})^{N_p}, (1+\overline{r})^{N_p}\right]}{\left[\dfrac{(1+\underline{r})^{N_p}-1}{\underline{r}}, \dfrac{(1+\overline{r})^{N_p}-1}{\overline{r}}\right]} \tag{17}$$

В табл. 5, 6 представлены результаты расчетов размера пенсии в зависимости от основных параметров.

Таблица 5

Интервал среднегодовой пенсии в зависимости от ставок пенсионного налога, доходности пенсионного фонда и динамики изменения заработной платы (относительно заработной платы последнего периода трудовой деятельности)

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Среднегодовая пенсия		Ширина интервала пенсии
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{w}$	$\overline{w}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	0,481	28,147	27,666
85	120	15	30	3	9	-3	4	0,481	28,147	27,666
80	100	5	25	3	9	-3	4	0,160	23,456	23,295
80	100	15	30	2	10	-3	4	0,384	38,770	38,385
80	100	15	30	3	9	-10	4	0,481	287,306	286,82

Таблица 6

Интервал среднегодовой пенсии в зависимости от ставок пенсионного налога, доходности пенсионного фонда и динамики изменения заработной платы (относительно заработной платы первого периода трудовой деятельности)

Величина начальной з/платы		Ставка отчислений в ПФ		Доходность ПФ		Темп роста з/платы		Среднегодовая пенсия		Ширина интервала пенсии
$\underline{v}$	$\overline{v}$	$\underline{\alpha}$	$\overline{\alpha}$	$\underline{r}$	$\overline{r}$	$\underline{q}$	$\overline{q}$	$\underline{w}$	$\overline{w}$	
80	100	15	30	3	9	-3	4	0,693	18,432	17,738
85	120	15	30	3	9	-3	4	0,693	18,432	17,738
80	100	5	25	3	9	-3	4	0,231	15,360	15,129
80	100	15	30	2	10	-3	4	0,512	24,190	23,677
80	100	15	30	3	9	-10	4	0,354	18,432	18,077

Результаты численных расчетов показывают, что применение методов интервального анализа для оценки пенсионного фонда позволяет получать приемлемые границы интервалов результатов при достаточно широком диапазоне изменения исходных параметров. С помощью сочетания методов обычной и обобщенной интервальных арифметик можно существенно сузить интервалы результатов.

Список литературы

[1] Авдеенко С.Н., Домбровский В.В. Анализ потоков платежей с спользованием обобщенной интервальной арифметики. Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000). Тезисы докладов. Часть III, Новосибирск, 2000. С. 143–144.

[2] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[3] Домбровский В.В. Интервальные методы в управлении финансами. Международная конференция по проблемам управления. Избранные труды. М., 1999. Том 1. С. 202–209.

[4] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

[5] Овсиенко Ю.В., Русаков В.П., Сухова Н.Н. Трудовая пенсия в накопительной форме // Экономика и математические методы. 2000, Т. 36, № 3.

[6] Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981.

[7] Hansen E.R. Computing zeros of functions using generalized interval arithmetic // Interval Computations. 1993. No. 3.

[8] Kaucher E. Interval analysis the extended interval spase $\mathbb{IR}$ // Computing Suppl. 1980. Vol. 2. P. 33–49.

[9] Moore R.E. Interval analysis. Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1966.

[10] Moore R.E. Methods and applications of interval analysis. SIAM: Philadelphia, 1979.