ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ АДИАБАТЫ ДОМБРОВСКОГО

А. Н. Попков

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

Предложенный С. А. Чаплыгиным метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа позволил в аналитической форме решить большой круг важных задач газовой динамики в до- и сверхзвуковых течениях. Г. А. Домбровсукий нашел наилучшее приближение при аппроксимации адиабаты, которое, как показано в его монографии, обобщает все известные варианты аппроксимации. Фактически Г. А. Домбровский получил фундаментальное решение для обобщенного преобразования Лежандра.

Используя его теорию, можно найти некоторое особое решение, которое не является частным случаем решения Домбровского. Полученное решение слабее аппроксимирует адиабату, т. к. одна из существенных постоянных в выражении, описывающем функцию Чаплыгина, становится фиксированной. Однако оно представляет самостоятельный интерес и может быть использовано при решении прикладных задач газовой динамики.

Каноническая система уравнений, описывающая установившиеся потенциальные плоские движения газа в переменных годографа скорости имеет вид [1]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{1}$$

где φ, ψ — соответственно потенциал скорости и функция тока. $s(V)$ — заранее не закрепленная функция от скорости. $\sqrt{K}$ — принято называть функцией Чаплыгина.

Система(1) являеся линейной и имеет удобную симметричную форму. Для баротропного газа, где $\rho = \rho(p)$ можно записать известные выражения, вытекающие при получении системы (1), которые исполь зуются для определения $s(V)$, [2]:

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\rho^2 K - 1}{\sqrt{K}}, \quad \frac{dV}{ds} = \frac{V}{\rho\sqrt{K}}, \tag{2}$$

или эквивалентная запись уравнений (2):

$$-\sqrt{K}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{1}{\rho V}, \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho V}\right) = -\sqrt{K}\frac{1}{V}, \tag{3}$$

которая будет использована далее благодаря симметрии.

При фиксированной связи $\rho = \rho(p)$ величина $\sqrt{K}$, входящая в уравнения, становится вполне определенной функцией независимой переменной s [2]. Зависимость функции K от газодинамических параметров для адиабатических течений совершенного газа известна:

$$K = \frac{1 - M^2}{\rho^2}. \tag{4}$$

Но такая зависимость не позволяет проинтегрировать систему (1) аналитически, несмотря на ее линейность, поэтому функцию K заменяют какой-либо другой, позволяющей найти аналитические решения. Самое простое и очень плодотворное приближение -$K = \mathrm{const}$ принадлежит С. А. Чаплыгину, в этом случае адиабатическая связь между давлением и плотностью заменяется касательной или секущей.

В работе [2] решение системы (1) с неопределенной функцией Чаплыгина отискивается в виде обобщенного преобразования Лежандра:

$$\varphi = -\alpha_1\Phi + \beta_1\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \quad \psi = -\alpha_2\Psi + \beta_2\frac{\partial\Psi}{\partial s}, \tag{5}$$

где принято, что $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — подлежащие определению функции аргумента s.

$$\Phi + i\Psi = F(\gamma), \tag{6}$$

$F(\gamma)$ — произвольная аналитическая функция переменной $\gamma = s - i\theta$.

Относительно β_1 и β_2 получается система обыкновенных дифференциальных уравнений [2], из которой следует, что

$$\ln(\beta_1\beta_2) = \alpha_3, \quad \alpha_i = \mathrm{const}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \alpha_3 > 0. \tag{7}$$

Функция Чаплыгина записывается:

$$\sqrt{K} = \frac{{\beta_1}^2}{\alpha_3}. \tag{8}$$

Функция β_1 определяется из уравнения Рикатти [3], которое после приведения к канонической форме записываеся в виде:

$$\acute{Y_x} + Y^2 = 1, \tag{9}$$

где $\beta_1 = \pm\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}Y, \quad s = \pm\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2}}x$.

Уравнение (9) имеет известные частные решения:

$$Y_1 = \pm 1, \quad Y_2 = \mathrm{th}(x), \quad Y_3 = \mathrm{cth}(x). \tag{10}$$

В работе [2] функция Чаплыгина выбрана в виде:

$$\sqrt{K} = n^2\mathrm{th}^2(m\sigma), \quad n = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad m = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}}, \quad \sigma = s - s_0, \tag{11}$$

для этой зависимости Г. А. Домбровский нашел общее решения системы (2) или (3).

В системе (2) уравнение для плотности является автономным, зависящим от вида функции Чаплыгина. Оно также представляет собой уравнение Рикатти более общего вида:

$$\frac{d\rho}{ds} - \sqrt{K}\rho^2 = -\frac{1}{\sqrt{K}}, \tag{12}$$

если ввести обозначения:

$$\frac{1}{\rho V} = f, \quad \frac{1}{V} = g, \tag{13}$$

то выражая из системы (3) функцию Чаплыгина и величину обратную ей через f и g, и их производные, уравнение для плотности (12) можно записать в форме, которая рассмотрена в [3]:

$$\frac{d\rho}{ds} + \frac{\acute{f_s}}{g}\rho^2 = \frac{\acute{g_s}}{f}. \tag{14}$$

При заданных f и g решение этого уравнения записывается в виде [3]:

$$\rho = \frac{g}{f} - \left[f^2(\mathrm{const}_1 - \int\frac{\acute{f_s}}{gf^2}ds)\right]^{-1}. \tag{15}$$

Заметим, что решением уравнения Рикатти (14) является и отношение $\rho_0 = g/f$, это не отмечено в справочнике [3]. Формула (15) как бы позволяет найти следующее точное решение уравнения (14) для плотности при известном ρ_0, а далее из второго уравнения системы (2) определяется новое значение для скорости. Попытка “улучшить” решение Домбровского показала, что дополнительная постоянная const_1 в (15) аддитивно суммируется с произвольной постоянной A в решениях для плотности и скорости полученных Домбровским. Таким образом, общее решение системы (2) или (3) для функции Чаплыгина (11), полученное Домбровским является фундаментальным.

Теория, изложенная в [2], допускает представление функции Чаплыгина в виде:

$$\sqrt{K} = n^2\mathrm{cth}^2(m\sigma), \tag{16}$$

для которого система (3) имеет частное простое решение при $m = \pm(1/3)$:

$$f = \frac{1}{\rho V} = D_1 \mathrm{ch}^3\left(\pm\frac{\sigma}{3}\right), \quad g = \frac{1}{V} = D_2 \mathrm{sh}^3\left(\pm\frac{\sigma}{3}\right), \tag{17}$$

где $D_1/D_2 = -n^2$, и можно принять $D_1 = 1/B, D_2 = 1/(Bn^2)$.

Поскольку одна из существенных произвольных постоянных принимает определенное значение $m = \pm 1/3$, то аппроксимация (16), (17) слабее осуществляет приближение к адиабате по сравнению с решением Домбровского. Для функции Чаплыгина (11) не существует физически реализуемого частного простого решения вида (17), поэтому полученное решение не может быть найдено из решения Домбровского. Оно является некоторым особым решением.

Но при использовании методики (15) определения последующего решения для плотности не удается для функции (16) и аппроксимаций (17) получить физически пригодное решение. Оно было получено в виде общего решения с произвольной постоянной λ для функции Чаплыгина (11) и соответствующих простых,как было отмечено, физически не реализуемых аппроксимаций для плотности и скорости аналогичных (17):

$$\rho_1 = \frac{1}{n^2}\{\mathrm{cth}^3 x + [\mathrm{sh}^6 x(\lambda - \mathrm{cth}^3 x + 6\mathrm{cth} x + 3\mathrm{th} x)]^{-1}\}. \tag{18}$$

Новое выражение для скорости, которое получается при интегрировании второго уравнения системы (2) при известных функции Чаплыгина и плотности, имеет вид:

$$\frac{1}{V_1} = \frac{1}{Bn^2}\left[\frac{1}{\mathrm{sh}^3 x} + \mathrm{ch}^3 x(\lambda - \mathrm{cth}^3 x + 6\mathrm{cth} x + 3\mathrm{th} x)\right]. \tag{19}$$

Аппроксимация (11), (18), (19) имеет уже две существенные произвольные постоянные n и λ, поэтому она достаточно удовлетворительно описывает адиабату и течение гипотетического газа, хотя одна из про извольных постоянных решения Домбровского уже фиксирована $m = \pm 1/3$.

Получение нового выражения для скорости (19) осуществляется наиболее просто с использованием интеграла (15) уравнения (14). Для этого умножим (15) на величину $\sqrt{K}$, тогда правая часть запишется:

$$\sqrt{K}\rho = -\frac{f'_\sigma}{f} - \frac{(C_1 - L)'_\sigma}{C_1 - L}, \quad L = \int \frac{f'_\sigma}{gf^2} d\sigma, \tag{20}$$

левая часть представляет собой также отношение производной от величины $1/(\rho_1 V_1)$ к этой же величине. После интегрирования получается следующее выражение для новой скорости:

$$\frac{1}{V_1} = C_2 \rho_1 [f(C_1 - L)], \tag{21}$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

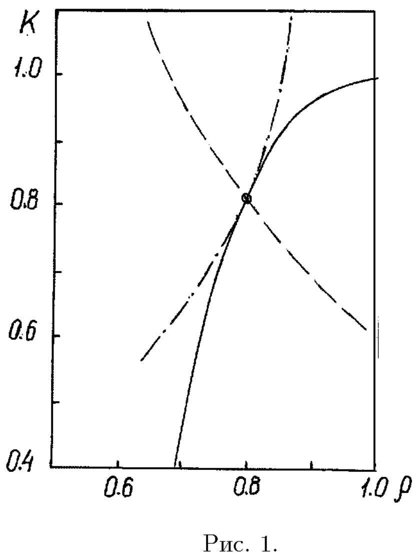

Рис. 1.

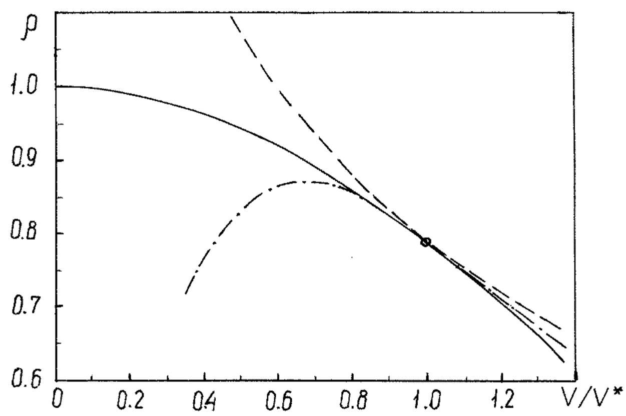

Рис. 2.

На рис. 1 показана зависимость $K(\rho)$. Штриховая линия — апрокси мация (17) для функции Чаплыгина (16). Штрих-пунктирная для аппроксимации (18), (19), но уже для функции Чаплыгина (11), которую нашел Г. А. Домбровский. Сплошная линия — точная кривая. Расчеты проведены для числа Маха равного 0.7 по методике изложенной в монографии [2]. На рис. 2 показаны зависимости $\rho(V)$ в сравнении с точной кривой, условные обозначения прежние. Очевидно, что появление еще одной произвольной постоянной λ позволяет улучшить аппроксимацию. Повторное применение выше рассмотренной процедуры отыскания дополнительных постоянных для решений (18), (19) не привело к успеху. Получающиеся новые произвольные постоянные просто суммируются с постоянной λ. Таким образом, решения (18), (19) являются фундаментальными и не улучшаемыми.

Список литературы

[1] Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука. 1966. 448 с.

[2] Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории в теории плоских течений газа. М.: Наука, 1964. 160 с.

[3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1964. 480 с.