

# ВЛИЯНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СТРАТИФИКАЦИИ НА ПАРАМЕТРЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru, maltseva@hydro.nsc.ru

The problem on steady internal waves in the layer of a weakly stratified fluid is considered. Approximate solutions describing solitary waves of finite amplitude are constructed with the help of scaling procedure using small Boussinesq parameter. Asymptotic behavior of a broad plateau-shape solitary waves degenerating into the smooth bore is studied.

## Введение

Высокая чувствительность нелинейных волновых структур в слабостратифицированной жидкости к малым возмущениям поля плотности в течении перед волной впервые отмечалась в работе Дж. Бенни и Д. Ко [7]. В указанной статье существенно использовался тот факт, что процедура вывода уравнений длинных волн с помощью разложения по малому параметру Буссинеска, характеризующему средний градиент плотности, не требует никаких ограничений малости на амплитуду волны. В дальнейшем этот подход развивали А. А. Борисов и О. Г. Держо [1, 2], построившие приближенные решения типа уединенных волн большой амплитуды для широких классов течений со сдвигом скорости. В предлагаемой работе анализируется влияние тонкой структуры стратификации на одну из предельных форм внутренних стационарных волн — уединенные волны с уплощенными вершинами типа плато. Движение жидкости в центральной части такой волны представляет собой сдвиговое течение, сопряженное в смысле законов сохранения [6] с основным невозмущенным потоком. В пределе при неограниченном увеличении эффективной длины волны и, соответственно, переносимой энергии, ее передний и задний фронты асимптотически принимают форму плавного бора. Уединенные волны типа плато в двухслойной жидкости изучались в [4, 5]. В случае непрерывной стратификации, как показано в [3, 9], сопряженное течение может быть неединственным для заданного состояния перед волной. Это приводит к возникновению новых предельных режимов поведения уединенных волн, которые и исследуются в данной работе.

## 1. Исходные уравнения

Рассматриваются установившиеся течения в слое  $0 < y < h$  неоднородной несжимаемой жидкости, заключенном между ровным дном  $y = 0$  и жесткой крышкой  $y = h$ . Движение описывается уравнением Дюбрей-Жакоутэн—Лонга для функции тока

$$\rho(\psi) \Delta \psi + \rho'(\psi) \left( gy + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 \right) = B'(\psi),$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $B$  — функция Бернулли. К этому уравнению эквивалентным образом сводится система стационарных уравнений Эйлера после интегрирования уравнения переноса для плотности и исключения давления с помощью интеграла Бернулли. Условия непротекания на дне и крышке имеют вид  $\psi = 0$  ( $y = 0$ ) и  $\psi = ch$  ( $y = h$ ), где  $c$  — скорость уединенной волны относительно покоящейся жидкости. В системе отсчета, связанной с волной, при  $|x| \rightarrow \infty$  течение стремится к равномерному потоку с функцией тока  $\psi = cy$  и распределением плотности  $\rho = \rho_\infty(y)$ . Для движения с указанной асимптотикой на бесконечности зависимость  $\rho$  и  $B$  от  $\psi$  имеет вид

$$\rho(\psi) = \rho_\infty(\psi/c), \quad B'(\psi) = \rho'(\psi) \left( \frac{g\psi}{c} + \frac{1}{2} c^2 \right).$$

Течение характеризуется двумя безразмерными величинами — параметром Буссинеска  $\sigma$  и числом Фруда  $\lambda$ ,

$$\sigma = \frac{N_0^2 h}{\pi g}, \quad \lambda = \frac{\sigma g h}{\pi c^2},$$

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00850), Программы интеграционных проектов СО РАН (грант № 1-2000) и INTAS (грант YSF 00-095).

© Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева, 2001.

где  $N_0$  — характерный масштаб частоты Брента – Вайсяля  $N^2 = -g\rho'_\infty/\rho_\infty$ . Предполагается, что безразмерная плотность  $\rho = \rho_\infty(y)/\rho_\infty(0)$  как функция безразмерной вертикальной координаты  $\bar{y} = \pi y/h$  имеет вид

$$\rho(\bar{y}, \sigma) = 1 - \sigma\bar{y} - \sigma^2\rho_0(\bar{y}) - \sigma^3\rho_1(\bar{y}, \sigma), \quad (1)$$

где гладкие функции  $\rho_0$  и  $\rho_1$  таковы, что в области  $0 < \bar{y} < \pi$ ,  $0 < \sigma < \sigma_0$  выполнены неравенства  $\rho > 0$ ,  $\rho_{\bar{y}} < 0$ . Коэффициент  $\rho_0$  моделирует тонкую структуру стратификации на фоне линейного распределения. Зависимость (1) охватывает достаточно широкий класс профилей плотности, в который наряду с линейным законом входит и экспоненциальная стратификация  $\rho = \exp(-\sigma\bar{y})$ .

В безразмерных переменных задача об уединенной волне в слабостратифицированной жидкости формулируется как нелинейная задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho(y+v, \sigma)\nabla v) - \rho_y(y+v, \sigma)(\sigma^{-1}\lambda v + \frac{1}{2}|\nabla v|^2) &= 0, \\ v(x, 0) = v(x, \pi) = 0, \quad v \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

в которой для заданного закона стратификации (1) с малым параметром Буссинеска  $\sigma$  требуется определить, при каких значениях числа Фруда  $\lambda$  существуют ненулевые решения  $v(x, y) = \psi(x, y) - y$ .

## 2. Спектр линейных волн

Важную роль в анализе решений типа уединенных волн играет понятие их сверхкритичности по отношению к скоростям распространения линейных волн. Свойство до- или сверхкритичности внутренней стационарной волны определяется взаимным расположением точки в плоскости  $(\sigma, \lambda)$ , соответствующей этой волне, и спектра задачи о малых возмущениях основного течения. Задача (2), линейризованная на решении  $v = 0$ , является самосопряженной. Она имеет непрерывный спектр обобщенных собственных функций в виде волновых пакетов

$$v_n = e^{\pm i\kappa x} \varphi_n(y; \sigma, \kappa) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $\kappa$  — волновое число, а  $\varphi_n$  — собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$(\rho\varphi_y)_y - (\kappa^2\rho + \sigma^{-1}\lambda\rho_y)\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$$

с функцией плотности  $\rho(y, \sigma)$  основного течения. При каждом фиксированном  $\sigma \in (0, \sigma_0)$  непрерывный спектр линейризованного оператора Дюбрей-Жакотэн—Лонга заполняет вещественную полуось  $\lambda \geq \lambda_1(\sigma, 0)$ , где  $\lambda_n = \lambda_n(\sigma, \kappa)$  — собственные значения указанной вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля, занумерованные в порядке их возрастания. Известно [10], что все  $\lambda_n$  также являются монотонно возрастающими функциями модуля волнового числа  $\kappa$ . В силу этого свойства для каждой точки  $(\sigma, \lambda)$  в области  $\lambda_n(\sigma, 0) < \lambda < \lambda_{n+1}(\sigma, 0)$  имеется  $2n$  обобщенных собственных функций (3) первых  $n$  волновых мод. Границы смежных областей спектра указанного вида задаются длинноволновыми пределами собственных значений  $\lambda_i(\sigma, \kappa)$  при  $\kappa \rightarrow 0$ .

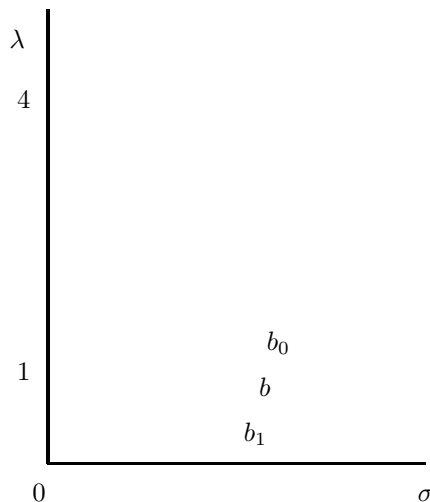


Рис. 1. Спектр линейризованной задачи.

Таким образом, нелинейные внутренние волны, сверхкритические по отношению ко всем модам линейных волн, изображаются точками  $(\sigma, \lambda)$  с числами Фруда  $\lambda < \lambda_1(\sigma, 0)$ . Для экспоненциальной стратификации  $\rho = \exp(-\sigma y)$  собственные функции и собственные значения имеют вид

$$\varphi_n(y) = e^{\sigma y/2} \sin ny, \quad \lambda_n(\sigma, \kappa) = n^2 + \kappa^2 + \frac{\sigma^2}{4},$$

так что в этом случае условие сверхкритичности имеет вид  $\lambda < 1 + \sigma^2/4$ .

### 3. Сопряженные течения

Понятие сопряженного течения было введено Бенджамином [6], изучавшим условия совместимости горизонтальных течений жидкости далеко впереди области неоднородного движения и позади нее. Пара решений  $\psi^\pm(y)$  уравнения Дюбрей-Жакотэн — Лонга, зависящих только от вертикальной переменной  $y$ , задает сопряженные течения, если они обладают одинаковыми потоками массы, импульса и энергии. Необходимость согласования течений перед уединенной волной и в ее срединной части вытекает из отсутствия разрывов и замкнутых линий тока, что предполагается *a priori*. Задача отыскания течений, сопряженных с равномерным потоком, сводится к нелинейной задаче на собственные значения для одномерного оператора Дюбрей-Жакотэн — Лонга

$$(\rho v_y)_y - \rho_y \left( \sigma^{-1} \lambda v + \frac{1}{2} v_y^2 \right) = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0, \quad (4)$$

$\rho = \rho(y+v, \sigma)$ , с дополнительным интегральным соотношением, следующим из закона сохранения импульса. Для течений с горизонтальными линиями тока интеграл потока импульса через вертикальное сечение канала можно записать в виде

$$\int_0^\pi L dy = \text{const}, \quad (5)$$

где  $L$  — лагранжиан уравнения (4),

$$L = -\frac{1}{2} \rho v_y^2 + \sigma^{-1} \lambda \int_y^{y+v} (\rho(\psi, \sigma) - \rho(y+v, \sigma)) d\psi.$$

Согласно (5) все решения, описывающие сопряженные течения, должны находиться на той же поверхности уровня указанного функционала, что и основное решение. При этом потоки массы и энергии в них совпадают автоматически, так как по построению все эти течения имеют распределение плотности и функции Бернулли по линиям тока, одинаковое с основным течением.

Решения задачи о сопряженных течениях при малых значениях параметра Бусинеска близки к собственным функциям задачи (4) в пределе  $\sigma = 0$ , имеющим вид  $v_n = b \sin ny$  для собственного значения  $\lambda_n = n^2$ . Нестандартной эту задачу о бифуркациях в простых собственных значениях делает наличие дополнительного интегрального условия. При ее исследовании используется двухступенчатая конструкция Ляпунова — Шмидта. Сначала задача (4)-(5) сводится к системе двух неявно заданных функциональных уравнений для трех вещественных параметров — пары  $q = (\sigma, \lambda - \lambda_n)$  и амплитудного параметра  $b$ :

$$A_n(b)q = f(q, b), \quad (6)$$

где нелинейная правая часть имеет асимптотику  $|f| = O(|q|^2)$  при  $|q| \rightarrow 0$ , а матрица

$$A_n(b) = \begin{pmatrix} s_n(b) & m_n(b) \\ s'_n(b) & m'_n(b) \end{pmatrix}$$

имеет коэффициенты  $m_n(b) = b^2/2$  и

$$s_n(b) = \frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi \int_y^{y+b \sin ny} (\rho_0(y + b \sin ny) - \rho_0(\psi)) d\psi dy + \frac{\pi}{4} (nb)^2 + \frac{n}{3\pi} (1 - (-1)^n) b^3.$$

Одно из уравнений системы (6) представляет собой уравнение разветвления для фредгольмовой задачи (4) с одномерным ядром линеаризованного оператора, а другое — интеграл потока импульса (5). На следующем этапе метод Ляпунова–Шмидта применяется к полученной двумерной системе. При ее исследовании определяющую роль играет вариационное свойство исходной задачи, в силу которого матрица  $A_n$  линейной части редуцированной системы имеет структуру матрицы Вронского. В работе [3] получено достаточное условие существования семейств сопряженных течений в терминах функции  $\rho_0$ , задающей тонкую структуру стратификации. Именно, искомые решения существуют для значений амплитуды  $b = b(\sigma)$  вблизи простых ненулевых корней вронскиана  $\Delta_n(b) = \det A_n(b)$ ,

$$\Delta_n(b) = -m_n^2(b) \left( \frac{s_n(b)}{m_n(b)} \right)'. \quad (7)$$

При этом для каждого корня  $b = b_0$  соответствующая ветвь  $n$ -й моды сопряженных течений в плоскости  $(\sigma, \lambda)$  при малых значениях параметра Буссинеска имеет следующую асимптотику:

$$\lambda(\sigma) = n^2 - \frac{s_n(b_0)}{m_n(b_0)} \sigma + O(\sigma^2). \quad (8)$$

Поскольку тангенс угла наклона касательной к границе спектра в точке  $(\sigma, \lambda) = (0, 1)$  равен величине  $-s_1''(0)/m_1''(0)$ , сверхкритическими являются те из ветвей сопряженных течений первой моды, для которых выполнено неравенство  $s_1(b_0)/m_1(b_0) > s_1''(0)/m_1''(0)$ . Функция тока сопряженного течения главной моды в нулевом приближении имеет вид  $\psi = y + b_0 \sin y$ , поэтому условием отсутствия возвратного тока жидкости в этом движении при  $n = 1$  является ограничение на амплитуду  $|b_0| < 1$ .

## 4. Длинноволновое приближение

Решение задачи об уединенных волнах (2) ищется в следующем виде:

$$v(x, y, \sigma) = v_0(\tilde{x}, y) + \sigma v_1(\tilde{x}, y) + O(\sigma^2), \quad \tilde{x} = \sqrt{\sigma}x.$$

При этом число Фруда также ищется в виде ряда по степеням параметра Буссинеска,

$$\lambda = \lambda_0 + \sigma \lambda_1 + O(\sigma^2).$$

Сравнение слагаемых с одинаковыми степенями  $\sigma$  дает рекуррентную серию задач для коэффициентов  $v_i$ ,

$$\begin{cases} v_{iyy} + \lambda_0 v_i = f_i, \\ v_i(x, 0) = v_i(x, \pi) = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $f_0 = 0$ ,

$$f_1 = -v_{0xx} - \lambda_0 \rho_0'(y + v_0) v_0 + (y + v_0) v_{0yy} + v_{0y} + \frac{1}{2} v_{0y}^2 - \lambda_1 v_0.$$

Для существования нетривиального решения необходимо  $\lambda_0 = n^2$  ( $n$  — натуральное число), то есть  $\lambda$  должно быть близким к одному из собственных значений. Для главной моды  $n = 1$  решение в приближении наименьшего порядка имеет вид

$$v_0(x, y) = a_0(x) \sin y,$$

где коэффициент  $a_0$  находится из условия совместности системы уравнений последующего приближения. Условие ортогональности в  $L_2(0, \pi)$  правой части  $f_1$  и собственной функции однородной задачи  $\sin y$  дает нелинейное дифференциальное уравнение длинных волн

$$a_0'' = p'(a_0) \quad (10)$$

с функцией

$$p(a_0) = -s_1(a_0) - \lambda_1 m_1(a_0).$$

Здесь  $s_1$  и  $m_1$  — коэффициенты матрицы  $A_1$ , участвующей в системе (6) уравнений разветвления для параметров сопряженных течений. Поскольку функции  $s_1(b)$  и  $m_1(b)$  имеют нули второго порядка в точке  $b = 0$ , функция  $p(a)$  также имеет в точке  $a = 0$  двукратный корень. Решение типа уединенной волны

получается в том случае, когда  $\lambda_1$  попадает в область значений функции  $\lambda_1(b) = -s_1(b)/m_1(b)$ , а соответствующая величина  $b \neq 0$  является простым корнем функции  $p$ . Искомая функция  $a_0(x)$  дается при этом квадратурой

$$x = \pm \int_{a_0}^b \frac{da}{\sqrt{2p(a)}}. \quad (11)$$

Параметр  $b$  дает амплитуду поля скоростей в срединной части уединенной волны, а величина  $\lambda_1$  определяет скорость ее распространения по формуле  $c^2 = \sigma gh/\pi(1 + \sigma \lambda_1(b))$  с точностью  $O(\sigma^3)$ . Полезно отметить, что конкретный вид функции  $\lambda_1$  зависит только от коэффициента  $\rho_0$  в формуле (1), задающего тонкую структуру стратификации. Отсюда ясно, что в случае слабой стратификации малые возмущения плотности слабо влияют на скорость распространения уединенной волны большой амплитуды, но могут радикальным образом изменить ее геометрические параметры.

Решение вида (11) существует при условии выполнения неравенства  $p(a) > 0$  всюду внутри промежутка интегрирования. Это требование выполнено, если, например, функция  $\lambda_1(a)$  является строго монотонно возрастающей в промежутке  $b < a < 0$  при отрицательном  $b$  или строго монотонно убывающей в области  $0 < a < b$  в случае положительного корня  $b$ . В первом из этих случаев получается симметричная уединенная волна возвышения линий уровня плотности, во втором случае изопикны имеют впадины. Необходимым условием положительности функции  $p$  в силу ее определения является неравенство  $\lambda_1(b) < \lambda_1(0) = -s_1''(0)/m_1''(0)$ , а это есть не что иное как условие сверхкритичности уединенной волны.

## 5. Предельные формы уединенных волн

Уединенная волна принимает форму плато в том случае, когда ее амплитуда  $b$  близка к точке минимума функции  $\lambda_1(b)$ . В самом деле, согласно формуле (7) каждая точка экстремума этой функции, в которой выполнено неравенство  $\lambda_1'' \neq 0$ , является простым корнем вронскиана  $\Delta_1$ . Всякий такой корень порождает ветвь (8) сопряженных течений, но условие сверхкритичности, необходимое для построения решений типа уединенной волны, выполнено только для точек минимума. Пусть  $b_0$  — ближайший к точке  $b = 0$  экстремум функции  $\lambda_1$ , являющийся ее строгим локальным минимумом. Тогда  $b_0$  является двукратным корнем для функции  $p$ , и поэтому при стремлении амплитудного параметра  $b$  к указанному предельному значению фронт уединенной волны вырождается в плавный бор амплитуды  $b_0$ . Эффект уплощения вершины уединенной волны описывается явными формулами, если функция  $\rho_0(y)$  — кубический полином. Функция  $p(a)$  в этом случае является полиномом четвертой степени  $p(a) = \gamma a^2(b-a)(\tilde{b}-a)$ , где константы  $\gamma > 0$ ,  $b, \tilde{b}$  однозначно определяются через коэффициенты полинома  $\rho_0$ . Корни  $b$  и  $\tilde{b}$  ( $|b| < |\tilde{b}|$ ) полинома  $p(a)$  в рассматриваемой ситуации имеют одинаковый знак, и форма линий тока определяется функцией

$$a_0(x) = \frac{b\tilde{b}(1 - \text{th}^2(\sqrt{\gamma b\tilde{b}} x/2))}{\tilde{b} - b \text{th}^2(\sqrt{\gamma b\tilde{b}} x/2)}.$$

При малых  $\tilde{b} - b$  получается волна в виде плато, типичный профиль которой приведен на рис. 2.

Интересно отметить, что для линейной стратификации ( $\rho_0 \equiv 0$ ) и экспоненциальной ( $\rho_0 = -y^2/2$ ) уравнение (10) является интегралом стандартного уравнения Кортевега – де Фриза с квадратичной нелинейностью, для которого уединенные волны типа плато невозможны.

Если функция  $\lambda_1(b)$  имеет в области допустимых значений амплитуды  $|b| < 1$  еще один локальный минимум  $b = b_1$ , в котором  $\lambda_1(b_1) < \lambda_1(b_0)$ , возможной оказывается предельная волновая конфигурация, отличающаяся от описанной выше. Именно, пусть в области отрицательных  $b$  (рис. 3) значение амплитуды  $b < b_*$  близко к величине  $b_*$ , для которой  $\lambda_1(b_0) = \lambda_1(b_*)$ . Тогда функция  $p(a)$  в квадратуре (11) принимает в окрестности точки  $a = b_0$  значения, близкие к нулю. Вследствие этого уединенная волна имеет вид плато амплитуды  $b_0$ , в центре которого возникает дополнительное возвышение суммарной амплитуды  $b$ . Наличие такого возвышения может служить одним из возможных объяснений обрушения уединенных внутренних волн типа плато в их срединной части, наблюдавшегося в недавних экспериментах [8].

Таким образом, волны типа плато существуют для значений  $(\sigma, \lambda)$  в криволинейном секторе между границей спектра и ближайшей ветвью сверхкритических сопряженных течений в области, примыкающей к этой ветви. При переходе через указанную ветвь происходит трансформация уединенной волны со скачкообразным изменением амплитуды и образованием возвышения (или впадины) в центральной

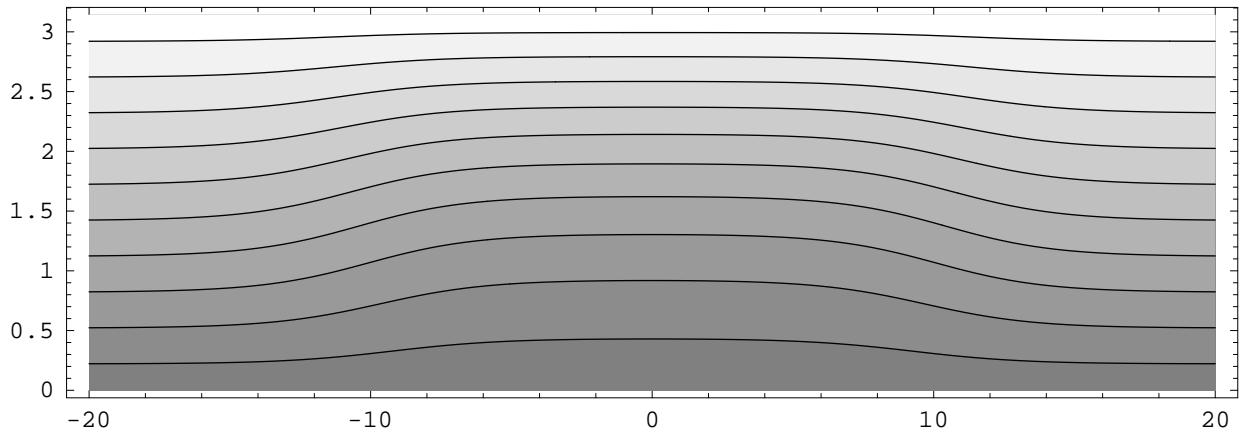


Рис. 2. Картина линий тока для  $\rho_0 = y(8y^2 - 33.0822y + 34.7464)/9$ ,  $b = -0.5, \tilde{b} = -0.51$ .

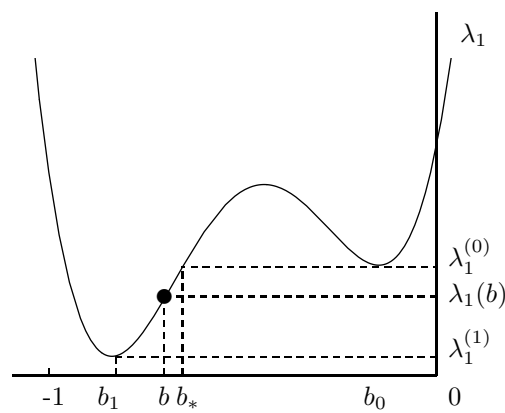


Рис. 3. График зависимости коэффициента  $\lambda_1$  от амплитуды волны  $b$ .

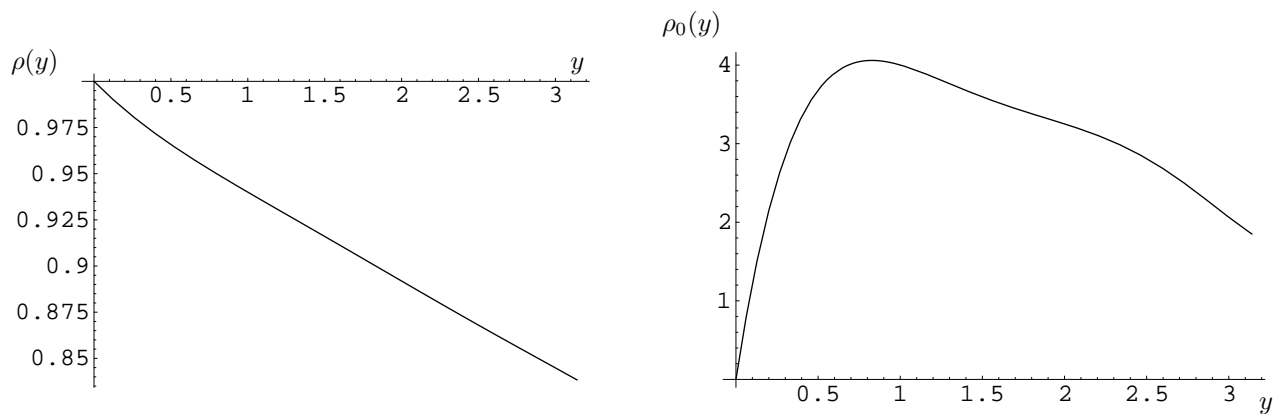


Рис. 4. Распределение плотности по глубине и тонкая структура стратификации;  $\sigma = 1/20$ .

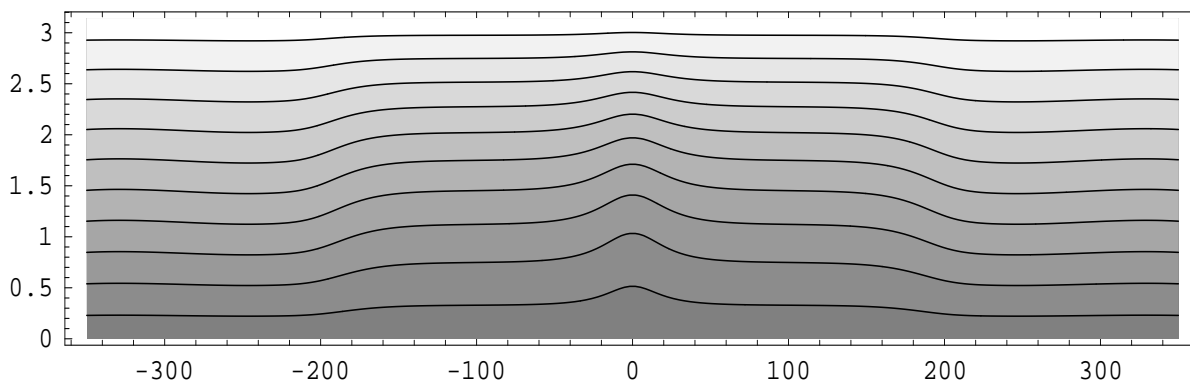


Рис. 5. Картина линий тока в уединенной волне с возвышением в средней части;  $b_0 = -1/3, b_1 = -19/20, b_* = -0.596402$ .

части плато. Этим случай непрерывной стратификации существенно отличается от двухслойной стратификации с кусочно-постоянным распределением плотности, для которой существует единственная ветвь сопряженных течений (она же является ветвью решений типа плавного бора). Ранее в работе [5] было показано, что диаграмма бора является односторонним пределом для ветвей уединенных волн типа плато в двухслойной жидкости. Для непрерывной стратификации в случае, когда амплитудная функция  $\lambda_1(b)$  имеет в промежутке  $|b| < 1$  монотонную последовательность минимумов, убывающих с ростом  $|b|$ , возможно существование любого наперед заданного количества ветвей сопряженных течений, к каждой из которой примыкают области существования семейств уединенных волн типа плато двух описанных выше видов.

## Список литературы

- [1] Борисов А. А., Держо О. Г. Структура стационарных уединенных волн конечной амплитуды // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1990. № 2. С. 60–70.
- [2] Держо О. Г. Акустические и гравитационные волны большой амплитуды в неоднородных средах. Кандидатская диссертация. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1993.
- [3] Макаренко Н. И. Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. № 2, 1999, 69–78.
- [4] Мальцева Ж. Л. Об одном типе уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1999. № 5. С. 55–61.
- [5] Мальцева Ж. Л. Об асимптотических свойствах уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // Вычислит. технологии. 2000. Т. 5, № 1. С. 85–92.
- [6] BENJAMIN T. B. A unified theory of conjugate flows // Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1971. Vol. 269. P. 587–643.
- [7] BENNEY D. J., KO D. R. S. The propagation of long large amplitude internal waves // Stud. Appl. Math. 1978. Vol. 59. P. 187–199.
- [8] GRUE J., JENSEN A., RUSAS P.-O., SVEEN J. K. Breaking and broadening of internal solitary waves // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 413. P. 181–217.
- [9] LAMB K. G., WAN B. Conjugate flows and flat solitary waves for a continuously stratified fluid // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10, No. 8. P. 2061–2079.
- [10] YIH CHIA-SHUN. Stratified flows. Academic Press, N.-Y., 1980.