

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ОТКРЫТОГО ПОТОКА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ: РАСЧЕТЫ СТОКА НА ВОДОСБОРЕ И НАКАТА ВОЛН ЦУНАМИ НА БЕРЕГ

С. Л. КИВВА, М. И. ЖЕЛЕЗНЯК

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

e-mail: serg@kivva.pp.kiev.ua

Для двумерных уравнений мелкой воды построена неявная консервативная разностная схема первого порядка аппроксимации. Схема позволяет моделировать движение жидкости со свободной границей. Приведены примеры численного решения задач формирования стока на водосборе и наката волны на берег.

Введение

Двумерные модели открытых потоков с подвижной границей используются для расчетов наката длинных волн на берег [1, 2], распространения волны прорыва при разрушении плотин, затопления прирусловых территорий при паводках и формирования стока под влиянием осадков на водосборах [3, 4]. Традиционно в океанографии уравнения вертикально проинтегрированной гидростатической бездисперсионной модели именуются уравнениями мелкой воды, в речной гидравлике и гидрологии — двумерными уравнениями Сен-Венана. Далее будет использоваться первое наименование.

Для численного решения уравнений мелкой воды активно использовались явные разностные схемы второго порядка аппроксимации типа Прейссмана, Лакса-Вендрова, МакКормака и др. [1–6]. Присущие схемам второго порядка вблизи подвижной границы осцилляции и жесткое ограничение на временной шаг, обусловленные существенным влиянием нелинейных членов донного трения не позволяют использовать их для сквозного счета распространения фронта водного потока. У свободной границы используются для этого специальные приемы — например, введение искусственного слоя пленки жидкости во всей расчетной области [2], специальные интерполяции, и введение новых переменных [1].

Для обеспечения сквозного расчета подвижной границы без ее специального выделения в последние годы широко применяют TVD варианты известных явных схем [7–11]. При таком подходе, используя метод дробных шагов [12, 13], неоднородные двумерные уравнения мелкой воды расщепляются на однородные одномерные уравнения и систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неоднородного члена. Однородные одномерные уравнения аппроксимируются TVD схемами. Известно, что, если система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает разномасштабные процессы, то такая система является жесткой. Для решения таких систем рекомендуется использовать неявные методы. Однако, Rember [14] показал, что для “жестких” задач использование методов расщепления высокого порядка, порождает схему только первого порядка точности.

В данной работе для уравнений мелкой воды построена неявная разностная схема первого порядка аппроксимации. В силу аппроксимации уравнения неразрывности разностной схемой вверх по потоку обеспечивается неотрицательность глубины потока для любых режимов течения. Схема применялась для расчета формирования стока на небольших водосборах и на примере одномерной задачи показана возможность ее использования для расчета наката длинных волн на берег.

1. Двумерные уравнения движения жидкости

Пусть поверхность земли описывается уравнением $z = \xi(x, y)$, а свободная поверхность жидкости — $z = \eta(x, y)$ (рис. 1). Двумерные уравнения мелкой воды с учетом напряжений на дне и свободной поверхности жидкости выводятся интегрированием по глубине трехмерных уравнений динамики потока с учетом ограничений, рассмотренных в [1, 2, 3, 5]. Для склонового стока с учетом интенсивности осадков R и интенсивности инфильтрации I эти уравнения записываются в виде [3, 5]

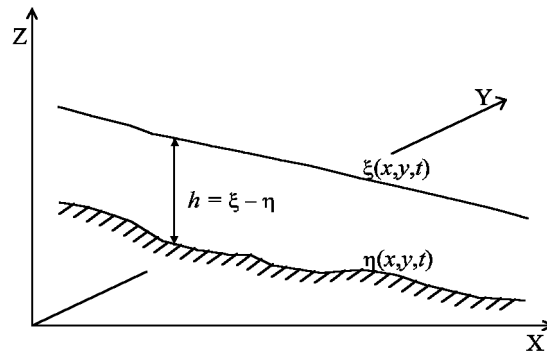


Рис. 1. Схематизация потока жидкости по склону водосбора.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = R(x, y, t) - I(x, y, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(uuh) + \frac{\partial}{\partial y}(vuh) - u_{\eta}R = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\tau_x^{\eta} - \tau_x^{\xi}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(vvh) - v_{\eta}R = -gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{1}{\rho}(\tau_y^{\eta} - \tau_y^{\xi}), \quad (3)$$

где u, v — проекции вектора скорости жидкости на оси координат x и y соответственно; g — ускорение свободного падения; τ^{η} — вектор напряжений на свободной поверхности жидкости; τ^{ξ} — вектор напряжений на дне; u_{η}, v_{η} — горизонтальные составляющие скорости дождя.

В случае турбулентного течения для вычисления напряжения трения на дне может использоваться формула Маннинга

$$\tau_x^{\eta} = gn^2 h^{-1/3} u (u^2 + v^2)^{1/2},$$

$$\tau_y^{\eta} = gn^2 h^{-1/3} v (u^2 + v^2)^{1/2},$$

где n — коэффициент шероховатости Маннинга.

Напряжение трения на свободной поверхности возникает в результате воздействия ветра и попадания в поток капель дождя. Капли дождя, падая на поверхность потока, образуют брызги и порождают турбулентность потока. При этом воздействие тем больше, чем глубина потока меньше и течение ламинарное. Все это может приводить к увеличению гидравлического сопротивления. В то же время влиянием ветра на формирование поверхностного стока на водосборе можно пренебречь.

Напряжение трения на свободной поверхности, вызванное падением капель дождя, может определяться соотношениями [5]:

$$\tau_x^{\xi} = -\rho Ru,$$

$$\tau_y^{\xi} = -\rho Rv.$$

Интенсивность инфильтрации рассчитывалась по модели Morel-Seytoux [15].

Уравнения (1)–(3) при опущенных членах, связанных с осадками и инфильтрацией, сводятся к традиционным уравнениям мелкой воды.

2. Разностная аппроксимация

Для конечно-разностной аппроксимации уравнений (1)–(3) область моделирования покрывается неравномерной прямоугольной

сеткой так, чтобы граница области аппроксимировалась ломаной линией, проходящей через узлы сетки. Вокруг каждого узла сетки выделяется элементарный объем A , боковые поверхности которого проходят по середине расстояния между соседними узлами сетки. Для упрощения разностных выражений на сеточном шаблоне соседние узлы сетки будем обозначать согласно сторонам горизонта (см. рис. 2). Так левый соседний узел от центрального узла шаблона P по оси X будем называть западным и обозначать

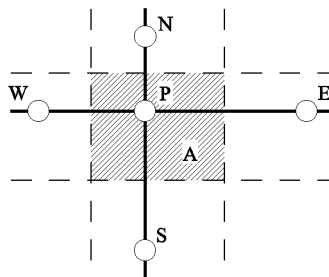


Рис. 2. Обозначения узлов сеточного шаблона.

индексом W , соответственно правый узел — восточным и обозначать индексом E . Для оси Y эти узлы будут соответственно южным (S) и северным (N).

Интегрируя уравнения (1)–(3) по элементарному объему A на временном интервале $[t, t + \Delta t]$, для сеточного узла P имеем:

$$\int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} h|_t^{t+\Delta t} dydx + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uh)|_{x_{PW}}^{x_P} dydt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uh)|_{x_P}^{x_{PE}} dydt +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vh)|_{y_{PS}}^{y_P} dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vh)|_{y_P}^{y_{PN}} dxdt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \varphi dydxdt, \quad (4)$$

$$\int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uh)|_t^{t+\Delta t} dydx + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uuh)|_{x_{PW}}^{x_P} dydt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uuh)|_{x_P}^{x_{PE}} dydt + g \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} h \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy dt +$$

$$+ g \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \int_{x_P}^{x_{PE}} h \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vuh)|_{y_{PS}}^{y_P} dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vuh)|_{y_P}^{y_{PN}} dxdt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \phi dy dx dt, \quad (5)$$

$$\int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (vh)|_t^{t+\Delta t} dydx + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uvh)|_{x_{PW}}^{x_P} dydt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} (uvh)|_{x_P}^{x_{PE}} dydt + g \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PW}}^{y_P} h \frac{\partial \eta}{\partial y} dy dx dt +$$

$$+ g \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_P}^{y_{PN}} h \frac{\partial \eta}{\partial y} dy dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vvh)|_{y_{PS}}^{y_P} dxdt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} (vvh)|_{y_P}^{y_{PN}} dxdt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_{PW}}^{x_{PE}} \int_{y_{PS}}^{y_{PN}} \psi dy dx dt, \quad (6)$$

где $x_{PJ} = 0.5(x_P + x_J)$ и $y_{PJ} = 0.5(y_P + y_J)$.

Заменяя в уравнениях (4)–(6) интегралы их квадратурными формулами, получим

$$A \frac{h_P^{t+\Delta t} - h_P^t}{\Delta t} + \sum_J \Delta_J F(h)_J^{t+\Delta t} = A \phi_P^{t+\Delta t}, \quad (7)$$

$$A \frac{(uh)_P^{t+\Delta t} - (uh)_P^t}{\Delta t} + \sum_J \Delta_J F(uh)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=W,E} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A \phi_P^{t+\Delta t}, \quad (8)$$

$$A \frac{(vh)_P^{t+\Delta t} - (vh)_P^t}{\Delta t} + \sum_J \Delta_J F(vh)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=S,N} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A \psi_P^{t+\Delta t}, \quad (9)$$

где $J = W, E, S, N$, то есть, если не оговорено противное, суммирование берется по всем боковым узлам шаблона; Δ_J — площадь боковой поверхности между элементарными объемами A_P и A_J .

Поток F_J через боковую поверхность элементарного объема аппроксимируется вверх по потоку

$$F(w)_J = \begin{cases} [u]_{PJ}^+ w_P + [u]_{PJ}^- w_J + \text{sign}(x_P - x_J) u_P w_P, & J = W, E, \\ [v]_{PJ}^+ w_P + [v]_{PJ}^- w_J + \text{sign}(y_P - y_J) v_P w_P, & J = S, N, \end{cases}$$

где квадратные скобки с нижним индексом PJ обозначают, что для аппроксимации заключенного в них шаблонного функционала на боковой поверхности элементарного объема между узлами P и J может использоваться формула наиболее подходящего осреднения (среднеарифметическое, гармоническое или геометрическое); $w^+ = \max(0, w)$ и $w^- = \min(0, w)$.

Функционал G_J вычисляется по формуле $G_J = 0.125(3h_P + h_J)(\eta_J - \eta_P)$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} A \frac{(wh)_P^{t+\Delta t} - (wh)_P^t}{\Delta t} &= Ah_P^t \frac{w_P^{t+\Delta t} - w_P^t}{\Delta t} + Aw_P^{t+\Delta t} \frac{h_P^{t+\Delta t} - h_P^t}{\Delta t} = \\ &= Ah_P^t \frac{w_P^{t+\Delta t} - w_P^t}{\Delta t} - w_P^{t+\Delta t} \sum_J \Delta_J F(h)_J^{t+\Delta t} + Aw_P^{t+\Delta t} \varphi_P^{t+\Delta t}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (8)–(9) перепишем в виде

$$Ah_P^t \frac{u_P^{t+\Delta t} - u_P^t}{\Delta t} + \sum_J \Delta_J \Phi(u)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=W,E} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A(\phi - u\varphi)_P^{t+\Delta t}, \quad (10)$$

$$Ah_P^t \frac{v_P^{t+\Delta t} - v_P^t}{\Delta t} + \sum_J \Delta_J \Phi(v)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=S,N} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A(\psi - v\varphi)_P^{t+\Delta t}, \quad (11)$$

где

$$\Phi(w)_J = \begin{cases} [u]_{PJ}^-(w_J - w_P)h_J + \text{sign}(x_P - x_J)u_P h_P w_P, & J = W, E, \\ [v]_{PJ}^-(w_J - w_P)h_J + \text{sign}(y_P - y_J)v_P h_P w_P, & J = S, N. \end{cases}$$

Очевидно, разностная схема (7), (10)–(11) имеет первый порядок аппроксимации по временной и пространственным переменным. В силу аппроксимации в уравнении неразрывности (1) конвективных членов разностями вверх по потоку разностная схема обеспечивает выполнение условия $h \geq 0$.

3. Аппроксимация граничных условий

Известно, что для однозначного решения уравнений (1)–(3) граничные условия должны удовлетворять следующим требованиям: (1) на каждой границе ставится столько условий, сколько на ней имеется входящих в область характеристик; (2) условию диссипативности.

Обычно в качестве граничных условий на границе области задается соответствующее количество значений глубины и составляющих скорости потока жидкости. На примере восточной границы покажем, как эти условия учитываются разностной схемой (7), (10)–(11). В этом случае мы имеем укороченный шаблон без узла E (рис. 2). Интегрируя уравнения (1)–(3) по этому укороченному шаблону, получим

$$A \frac{h_P^{t+\Delta t} - h_P^t}{\Delta t} + \sum_{J=W,S,N} \Delta_J F(h)_J^{t+\Delta t} = A\varphi_P^{t+\Delta t}, \quad (12)$$

$$Ah_P^t \frac{u_P^{t+\Delta t} - u_P^t}{\Delta t} + \sum_{J=W,S,N} \Delta_J \Phi(u)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=W} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A(\phi - u\varphi)_P^{t+\Delta t}, \quad (13)$$

$$Ah_P^t \frac{v_P^{t+\Delta t} - v_P^t}{\Delta t} + \sum_{J=W,S,N} \Delta_J \Phi(v)_J^{t+\Delta t} + \sum_{I=S,N} \Delta_I G_I^{t+\Delta t} = A(\psi - v\varphi)_P^{t+\Delta t}. \quad (14)$$

Реализация граничных условий осуществляется подстановкой соответствующих значений в функционалы F_J , Φ_J и G_J в уравнениях (12)–(14).

При моделировании стока на водосборе на склоне никаких граничных условий ставить не будем, а значения глубины и составляющих скорости потока в граничном узле будут определяться из решения разностных уравнений (7), (10)–(14).

В общем случае для граничного узла суммирование в уравнениях (7), (10)–(11) выполняется только для тех боковых узлов, которые принадлежат шаблону этого узла.

4. Численное решение системы нелинейных уравнений

Система нелинейных уравнений (7), (10)–(11) может быть представлена в виде:

$$R(x) = 0,$$

где $R(x) : E^n \rightarrow E^n$.

Для ее решения использовался метод Ньютона

$$x^{s+1} = x^s - \left(\frac{\partial R(x^s)}{\partial x} \right)^{-1} R(x^s),$$

где s обозначает номер итерации.

Итерации по нелинейности выполнялись до удовлетворения критерия:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i^{s+1} - x_i^s|}{|x_i^s|} \leq \varepsilon,$$

где ε некоторая наперед заданная константа.

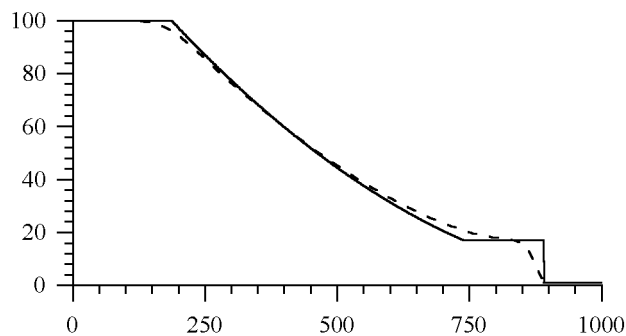


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решения задачи о прорыве плотины.

5. Результаты моделирования

Преимущества и недостатки построенной выше разностной схемы проиллюстрируем на следующих примерах.

5.1. Одномерная задача о прорыве плотины

Тестирование разностной схемы (7), (10)–(11) проводилось на задаче о прорыве плотины [16].

Рассматривался горизонтальный канал постоянного поперечного сечения длиной 1000 м, который имел тонкую перегородку в сечении $x = 500$ м. По левую сторону от перегородки уровень воды составлял 100 м, а с правой стороны — 1 м. Предполагалось, что первоначально вода по обе стороны перегородки находится в состоянии покоя. В нулевой момент времени плотина мгновенно разрушается и требуется определить последующее движение воды.

Область моделирования покрывалась равномерной сеткой с шагом, равным 10 м. На рис. 3 приведено сравнение численного (пунктирная линия) и аналитического (сплошная линия) решений через 10 сек. после прорыва плотины.

Известно, что разностные схемы первого порядка аппроксимации обладают значительной численной диффузией, что мы и наблюдаем на рис. 3.

5.2. Поверхностный сток с водосборов

На рис. 4–5 показаны примеры моделирования поверхностного стока с водосбора лога Придорожного Богуславской полевой экспериментальной гидрологической базы и с водосбора Моховцы в Словакии.

При моделировании поверхностного стока на водосборе можно явно не выделять границы водосбора, а проводить расчет на большей территории, содержащей интересующий нас водосбор. В этом случае граничные условия ставятся только на участках границы втекания жидкости (рис. 4).

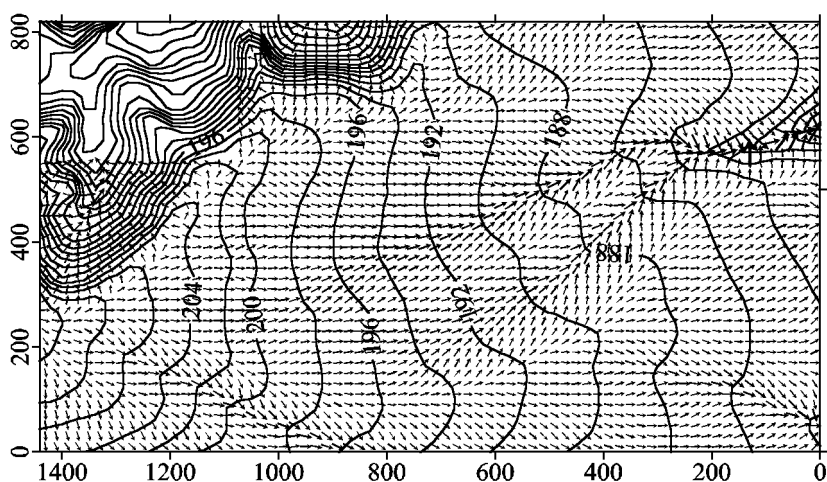


Рис. 4. Изолинии рельефа и поле скоростей поверхностного стока с водосбора лога Придорожного.

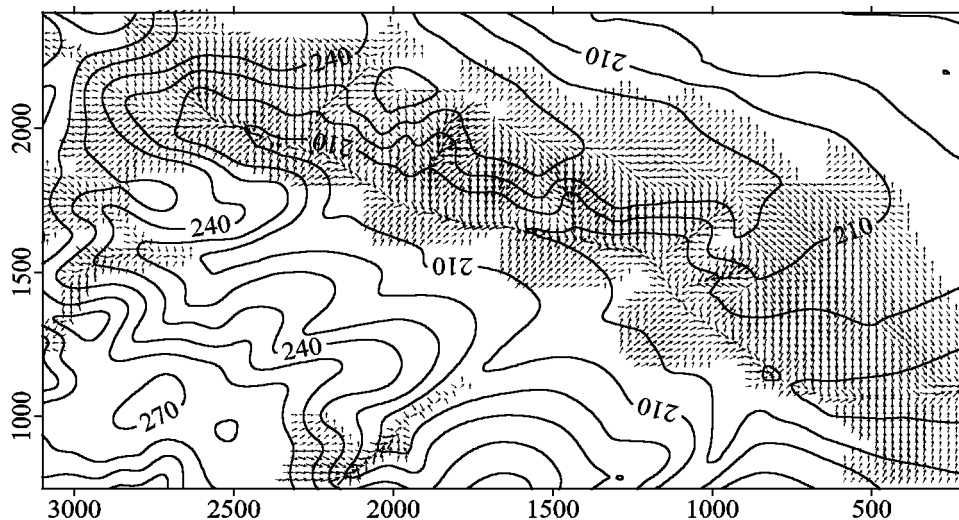


Рис. 5. Изолинии рельефа и поле скоростей поверхностного стока с водосбора Моховцы.

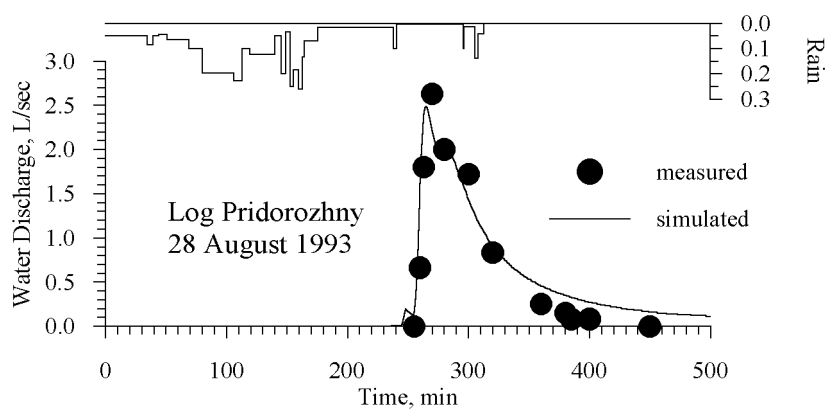


Рис. 6. Сравнение наблюдаемого и рассчитанного гидрографа стока.

В силу неоднородности растительного покрова, фильтрационных характеристик грунтов, рельефа поверхности и пространственной интенсивности осадков формирование поверхностного стока на разных участках водосбора происходит не одновременно. Водосбор обычно в начальном периоде дождя представляет собой чередования участков стока и бессточных областей разрыва потока. На рис. 5 приведено поле скоростей для начального периода формирования стока на водосборе Моховцы, демонстрирующее возможность воспроизведения такой сложной картины формирования стока на основе схемы (7), (10)–(11).

Сравнение рассчитанного и наблюдаемого гидрографа стока для водосбора лога Придорожного показано на рис. 6.

5.3. Накат волны на берег

Рассматривалась задача наката полусинусоидальной волны на плоский откос, сопряженный с участком постоянной глубины H . В начальный момент времени положение свободной поверхности и распределение поля скоростей определялись соотношениями

$$\eta(0, x) = H + h \sin \frac{\pi}{\lambda} (x - x_0 + \lambda/2),$$

$$u(0, x) = 2 \left(\sqrt{g\eta} - \sqrt{gH} \right),$$

где λ и h — длина и амплитуда волны соответственно. На рис. 7–8 приведены результаты численного решения наката волны $h/H = 0.1$ на откосы с уклонами 0.25 и 0.025.

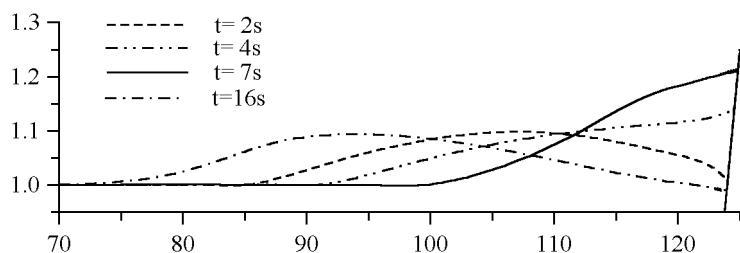


Рис. 7. Накат волны на береговой откос с уклоном 0.25.

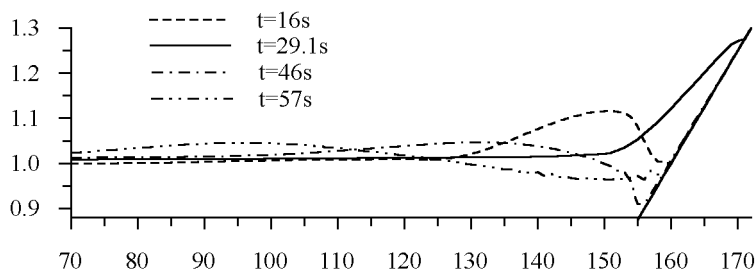


Рис. 8. Накат волны на береговой откос с уклоном 0.025.

Выводы

Для уравнения мелкой воды построена неявная консервативная разностная схема первого порядка аппроксимации. В силу аппроксимации конвективных членов в уравнении неразрывности вверх по потоку обеспечивается неотрицательность глубины потока для любых режимов течения. Численные эксперименты показали перспективность использования схемы для решения таких задач о движении жидкости со свободной поверхностью и подвижной границей, рассматриваемых в рамках различных модификаций уравнений мелкой воды, как формирования стока на малых водосборах и накат длинных волн на берег.

Модель формирования дождевого стока на малых водосборах разработана в рамках проекта *SPARTACUS* программы Европейской Комиссии Инко-Коперникус.

Список литературы

- [1] ШОКИН Ю. И., ЧУБАРОВ Л. Б., МАРЧУК АН. Г., СИМОНОВ К. В. Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, 1989.
- [2] ЖЕЛЕЗНЯК М. И., ПЕЛИНОВСКИЙ Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег. Горький: Институт прикладной физики АН СССР, 1985. С. 8–33.
- [3] КУЧМЕНТ Л. С., ДЕМИДОВ В. Н., МОТОВИЛОВ Ю. Г. Формирование речного стока. М.: Наука, 1983.
- [4] WOOLHISER D. A., SMITH R. E., GOODRICH D. C. KINEROS, A Kinematic Runoff and Erosion Model: Documentation and User Manual, USDA-ARS, ARS Publication No. 77, 1990.
- [5] ZHANG W., CUNDY T. W. Modeling of Two-Dimensional Overland Flow // Water Resour. Res. 1989. Vol. 25(9). P. 2019–2035.
- [6] YAN M., KANAWITA R. Modelling the Fate of Pollutant in Overland flow // Wat. Res. 2000. Vol. 34(13). P. 3335–3344.
- [7] BARAKHNIN V. B., BORODKIN N. V., KARAMYSHEV V. B. TVD scheme on a nonstationary adaptive grid // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling. 1999. Vol. 14. No. 4. P. 298–309.
- [8] LOUAKED M., HANICH L. TVD scheme for the shallow water equations // J. Hydr. Res. 1998. Vol. 36(3). P. 363–378.
- [9] MINGHAM C. G., CAUSON D. M. High-Resolution Finite-Volume Method for Shallow Water Flows // J. Hydr. Engrg. 1998. Vol. 124(6). P. 605–614.
- [10] YOST S. A., RAO P. M. S. V. A non-oscillatory scheme for open channel flows // Adv. in Water Resour. 1998. Vol. 22(2). P. 133–143.
- [11] ZOPPOU C., ROBERTS S. Catastrophic Collapse of Water Supply Reservoirs in Urban Areas // J. Hydr. Engrg. 1999. Vol. 125(7). P. 686–695.
- [12] ЯНЕНКО Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [13] STRANG G. On the construction and comparison of finite difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1968. Vol. 5(3). P. 506–517.
- [14] PEMBER R. B. Numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation, II: Higher-order Godunov methods // SIAM J. Scientific Comput. 1993. Vol. 14(4). P. 824–859.
- [15] MOREL-SEYTOUX H. J. From Excess Infiltration to Aquifer Recharge: A Derivation Based on the Theory of Flow of Water in Unsaturated Soils // Water Resources Research. 1984. Vol. 20. P. 1230–1240.
- [16] СТОКЕР ДЖ. ДЖ. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959.