ДИНАМИЧЕСКАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ СПРОСА

В. В. Домбровский, Е. В. Чаусова
Томский Государственный Университет, Россия
e-mail: Dombrovs@ef.tsu.ru

Введение

Рассматривается система, описываемая динамической сетью, узлы которой представляют размеры управляемых запасов, а дуги — направления и объем пополнения и перераспределения запасов, а также спрос в узлах сети. Класс таких моделей описывает широкий круг практических задач: управление запасами складской системы, управление процессами производства-распределения, управление инвестиционным портфелем, управление денежными потоками в банковской системе и т. д.

В классической теории управления запасами [1, 2] принято считать, что априорная неопределенность спроса имеет стохастический характер. Однако, при решении практических задач стохастический подход к управлению запасами имеет ряд недостатков. Во многих случаях отсутствует необходимая статистическая информация для построения адекватной эмпирической функции распределения спроса. Это приводит к необходимости учета неопределенности спроса нестохастической природы. В работах [3, 4] рассматривается динамическая система производства-распределения в предположении, что неизвестный спрос принадлежит заданному множеству, границы которого всегда можно задать с достаточной степенью достоверности. Анализ и поиск оптимальной стратегии управления в [3, 4] осуществляется с точки зрения теории множеств, что приводит к задачам экспоненциальной степени сложности.

В данной работе для анализа и расчета оптимальной стратегии управления системой применяется аппарат интервальной математики [5–8]. При этом, в отличии от [3, 4], кроме ограничений на состояние и управление, учитываются дополнительные ограничения на общий ресурс управляющих воздействий в системе. Данные ограничения задаются в виде векторно-матричных неравенств и их учет существенно усложняет решение задачи. В терминах полной интервальной математики Каухера получены необходимые и достаточные условия существования оптимальной стратегии управления, разработан алгоритм определения оптимальной стратегии и оценка скорости его сходимости.

1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим динамическую сетевую модель управления запасами в дискретном времени с интервально заданным спросом. Динамика сети описывается следующим разностным уравнением

$$x(t+1) = x(t) + Bu(t) + Ed(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор-столбец, i-ая компонента которого описывает состояние запаса в i-ом узле сети (на i-ом складе) в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^q$ — q-мерный вектор-столбец, компоненты которого представляют управляемые потоки в сети в момент времени t, управляющие воздействия перераспределяют запас между узлами сети и планируют поставки извне; $d(t) \in \mathbb{R}^m$ — m-мерный вектор-столбец, компоненты которого представляют неуправляемые потоки (спрос) в сети, причем спрос в узлах сети формируется как со стороны других узлов, так и извне; структура сети определяется структурой матриц $B \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

На управление $u(t)$ и состояние запаса $x(t)$ накладываются следующие ограничения, которые обусловлены возможностями системы:

$$x(t) \in X, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$
$$u(t) \in U, \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$
$$Hu(t) \in Z, \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

где $X \in \mathbb{IR}^n$ — n-мерный интервальный вектор-столбец, $X = [0, \overline{X}]$; $\mathbb{IR}$ — множество всех правильных интервалов, $\mathbb{IR} = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] : \underline{\mathrm{x}} \le \overline{\mathrm{x}},\ \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$; $U \in \mathbb{IR}^q$ — q-мерный интервальный вектор-столбец, $U = [0, \overline{U}]$; $Z \in \mathbb{IR}^r$ — m-мерный интервальный вектор-столбец, $Z = [\underline{Z}, \overline{Z}]$, $Z \ge 0$, $Z \ne 0$, $Z \cap HU = Z$; матрица $H \in \mathbb{R}^{r \times q}$, $r \times q$, $r < q$, $rank(H) = r$.

Относительно вектора спроса $d(t)$ известно лишь то, что он принимает значения в заданном интервале

$$d(t) \in D, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

где $D \in \mathbb{IR}^m$ — m-мерный интервальный вектор-столбец, $D = [\underline{D}, \overline{D}]$, $D \ge 0$.

Отметим, что в работах [3, 4] данная задача рассматривалась без учета ограничения (1.4).

Определение 1. Будем называть $\Phi : X \times T \to U$ допустимой стратегией управления с обратной связью, а $X_0 \subset X$ допустимым интервалом начальных состояний, если для любого $x(0) \in X_0$, $t = 0$, и любого $d(t) \in D$, $t \ge 0$, последовательности $x(t)$ и $u(t) = \Phi(x(t), t)$, получаемые рекуррентным соотношением (1.1), удовлетворяют ограничениям (1.2), (1.3), (1.4) для любого $t \ge 0$.

Определение 2. Будем называть n-мерный вектор-столбец $\widehat{x}$, $\widehat{x} \in X$, допустимым уровнем запаса, если для некоторого начального состояния $x(0) \in X_0$ существует допустимое управление Φ такое, что $x(t) \le \widehat{x}, \quad \forall d(t) \in D,\ t \ge 0$.

Введем критерий оптимальности в следующем виде

$$J = c^T \widehat{x}, \tag{1.6}$$

где $c \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор затрат, $c \ge 0$, $c \ne 0$, i-ая компонента которого представляет затраты на хранение единицы запаса в i-ом узле сети.

Необходимо найти оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^*$ в системе, доставляющий минимум функции (1.6), и стратегию управления с обратной связью Φ такую, что

$$\lim_{t \to \infty} \sup x_i(t) \le \widehat{x}_i^*, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.7}$$

для любого $x(0) \in X_0$ и любого $d(t) \in D$ (здесь $x_i(t)$ — i-ый элемент вектора $x(t)$, $\widehat{x}_i^*$ — i-ый элемент вектора $\widehat{x}^*$).

2. Основные результаты

Рассмотрим уравнение

$$Hu(t) = z(t), \tag{2.1}$$

где вектор $z(t) \in Z$, $t \ge 0$.

Решение уравнения (2.1) относительно $u(t)$ не единственно и имеет вид [9]

$$u(t) = H^+ z(t) + (I - H^+ H) y(t), \tag{2.2}$$

где $H^+ \in \mathbb{R}^{q \times r}$ — псевдообратная матрица к матрице H, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ — произвольный q-мерный вектор-столбец.

Решение уравнения (2.1) существует тогда и только тогда, когда выполняется условие [9]

$$HH^+ z(t) = z(t). \tag{2.3}$$

Так как матрица H полного ранга, то матрица H^+ определяется соотношением [9]

$$H^+ = H^T (HH^T)^{-1},$$

и условие (2.3) выполнено.

Очевидно, что при выполнении ограничения вида $z(t) \in Z$ автоматически выполняется ограничение (1.4).

С учетом (2.2) уравнение динамики сети (1.1) примет вид

$$x(t+1) = x(t) + \widetilde{B}\widetilde{u}(t) + Ed(t), \quad t \ge 0, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{u}(t) = (z^T(t), y^T(t))^T$, $\widetilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{r+q}$; $\widetilde{B} = [BH^+,\ B(I - H^+ H)]$, $\widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times (r+q)}$.

В качестве управления будем рассматривать теперь вектор $\widetilde{u}(t)$. Заметим, что на вектор y не накладывается явных ограничений, однако, он должен выбираться так, чтобы $u(t) \in U$.

Введем расширенное множество интервалов $\mathbb{IR} = \{\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] : \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}\}$, для которого необязательно выполнение условия $\underline{\mathrm{x}} \le \overline{\mathrm{x}}$. Алгебраическая система, построенная на множестве $\mathbb{IR}$, называется полной интервальной арифметикой Каухера, подробное описание которой можно найти в [6–8].

Будем обозначать $X_S = X \ominus S,\ X, S \in \mathbb{IR}^n$, где $\ominus$ — операция внутреннего вычитания на $\mathbb{IR}$ [6–8].

Теорема 1. *1. Допустимая стратегия управления $\Phi \in \widetilde{U}$ и допустимый интервал начальных состояний $X_0 \subset X$ существуют тогда и только тогда, когда*

$$X_{ED} \neq 0,$$
$$ED \subseteq -\widetilde{B}\widetilde{U},$$

где $\widetilde{U}(t) \in \mathbb{IR}^{r+q}$ — расширенный интервальный вектор, $\widetilde{U} = (Z^T, Y^T)^T,\ Z \in \mathbb{IR}^r,\ Y \in \mathbb{IR}^q, Y = \{y(t) : H^+z(t) + (I - H^+H)y(t) \in U\}$.

2. Интервал начальных состояний X_0 имеет вид

$$X_0 = (X_{ED} - \widetilde{B}\widetilde{U}) \cap X.$$

3. Допустимое управление $\widetilde{u}(t) = \Phi(x(t), t)$ определяется из включения

$$x(t) + \widetilde{u}(t) \in X_{ED}, \quad \forall x(0) \in X_0,\ t \ge 0. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Для любого неотрицательного вектора $c \ge 0,\ c \ne 0,\ c \in \mathbb{R}^n$ из (1.6) оптимальный допустимый уровень запаса $\widehat{x}^*$ имеет вид*

$$\widehat{x}^* = \overline{ED} - \underline{ED}.$$

Далее, введем интервальнозначную функцию [5] вида $X(a, b) = [a, b]$.

Рассмотрим $X(0, \widehat{x}^*)_{ED} = [-\underline{ED}, -\underline{ED}] = \widetilde{x}$. Согласно (2.5), оптимальное управление определяется из соотношения

$$\widetilde{u}(t) = \Phi(x(t), t) : \quad x(t) + \widetilde{B}\widetilde{u}(t) = \widetilde{x},\ t \ge 0.$$

Таким образом, вектор $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ определят устойчивое решение задачи (1.7).

В том случае, когда $X(0, \widehat{x}^*) \ne X$ и существует $x(0)$ такое, что $x(0) \in X_0,\ x(0) \notin X(0, \widehat{x}^*)$, возникает задача определения условий сходимости к оптимальной стратегии управления.

Теорема 3. *Оптимальная допустимая стратегия управления существует тогда и только тогда, когда*

1. $X_{ED} \ne 0$.
2. $ED \subseteq -\widetilde{B}\widetilde{U}$.
3. $\exists \varepsilon > 0 :\ ED + \varepsilon X(0, \theta) \subseteq -\widetilde{B}\widetilde{U}, \quad \theta = \overline{X} - \widehat{x}^*$.

Причем, сходимость к оптимальной стратегии управления достигается не более, чем за $T = (1 + \frac{1}{\varepsilon})$ шагов.

Замечание. Задача нахождения максимального значения параметра ε связана с получением верхней границы внутренней интервальной оценки обобщенного множества решений интервальной системы алгебраических уравнений [6–8] вида

$$ED + \varepsilon X(0, \theta) = -\widetilde{B}\widetilde{U}. \tag{2.6}$$

Согласно алгебраическому подходу [6–8], задача (2.6) сводится к нахождению алгебраического решения интервальной системы уравнений

$$ED + \varepsilon X(0, \theta) + \widetilde{B}\widetilde{U} = 0.$$

в полной интервальной арифметике Каухера $\mathbb{IR}$.

Теорема 4. *Оптимальное управление* $\widetilde{u}(t) = \Phi(x(t), t)$, *где* $x(0) \in X_0$, $t \geq 0$, *является решением следующей задачи линейного программирования*

$$w(X(\widetilde{x}, \widetilde{x} + \lambda\theta)) \Longrightarrow \min_{\lambda, \widetilde{u}(t)}$$
$$x(t) + \widetilde{B}\widetilde{u}(t) \in X(\widetilde{x}, \widetilde{x} + \lambda\theta),$$
$$\widetilde{u}(t) \in \widetilde{U},$$

где $w(X)$ — *длина интервала* X, $w(X) = \overline{X} - \underline{X}$; $\lambda \in \mathbb{R}$ — *вспомогательный параметр,* $\lambda \geq 0$.

Список литературы

[1] Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1973.

[2] Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М.: Наука, 1969.

[3] Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. Least Inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown demand // IEEE Transaction on robots and automation. 1997. Vol. 13, No. 5. P. 633–645.

[4] Blanchini F., Rinaldi F., Ukovich W. A Network Design Problem for a Distribution System with Uncertain Demands // SIAM J. on Optimization. 1997. Vol. 7, No. 2. P. 560–578.

[5] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986.

[6] Shary S. P. Algebraic Solution to Interval Linear Equations and their Application // Institute of Computational Technologies, Novosibirsk, Russia (препринт).

[7] Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Автор. дисс. ... д.ф-м.н. Новосибирск, 2000. 42 с.

[8] Шарый С. П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления, 1997. 3. С. 51–61.

[9] Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.