

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН КОНЦЕНТРАЦИИ В ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Чесноков

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

The kinetic model of bubbles movements in a fluid is considered. In 1-dimensional case self-similar solutions of the integrodifferential kinetic equation that describe penetration of bubbles into the unperturbed region through which the simple wave propagates are obtained. The solution of the Cauchy problem is given for linearized kinetic equation. In many-dimensional case characteristic equation that determine the rates of small disturbance propagation in bubbly flow is obtained.

**1. Автомодельные решения кинетического уравнения.** В работе Д. Руссо и П. Смереки [1] для описания волн концентрации в пузырьковой жидкости предложена кинетическая модель

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0, \quad \vec{u} = \vec{p} - \frac{3}{2} \nabla \Phi + \frac{1}{2} \vec{j}, \quad \vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\vec{p} \cdot \vec{u}), \quad \Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{j}, \quad \vec{j} = \int \vec{p} f d\vec{p}. \quad (1.1)$$

Переменные  $\vec{p}_1 = 2^{-1} \tau \rho_l U \vec{p}$ ,  $\vec{x}_1 = L \vec{x}$ ,  $t_1 = LU^{-1} t$ ,  $f_1 = (3\tau)^{-1} 2^3 (\tau \rho_l U)^{-3} f$  — размерные компоненты вектора импульса пузырька, декартовы координаты в  $R^3$ , время и одночастичная функция распределения пузырьков по координатам и импульсам;  $\vec{p}$ ,  $\vec{x}$ ,  $t$ ,  $f$  — соответствующие им безразмерные величины. Операторы  $\Delta$  и  $\nabla$  вычисляются по  $\vec{x}$ ;  $\tau$  — объем пузырька;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $\Phi(t, \vec{x})$  — функция, определяющая самосогласованное поле;  $\vec{j}(t, \vec{x})$  — вектор первых моментов функции распределения. В этой модели пузырьки являются твердыми невесомыми шарами одинакового радиуса, жидкость идеальная и несжимаемая, покоящаяся на бесконечности, а ее течение в области между пузырьками считается потенциальным. При этих условиях движение пузырьков определяется эффектами их коллективного взаимодействия и начальными данными. Рассматриваемая модель пригодна для описания реальных течений разреженной пузырьковой жидкости в случае малых перепадов давления.

Одномерное уравнение Руссо — Смереки в безразмерных переменных имеет вид

$$f_t + (p - j)f_x + pj_x f_p = 0, \quad j(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} pf dp. \quad (1.2)$$

В [2] исследованы характеристические свойства уравнения (1.2), сформулированы условия гиперболичности, построена бесконечная серия законов сохранения и найдены точные решения в классе бегущих волн. Построению инвариантных решений (1.2) посвящена работа [3]. В ней, в частности, показано, что построение автомодельных решений уравнения (1.2) вида  $f = f(x/t, p)$  сводится к решению интегрального уравнения второго рода. В этом разделе доказывается однозначная разрешимость интегрального уравнения, приводятся результаты численных расчетов для различных начальных распределений и физическая интерпретация решений.

Согласно [3], один из классов автомодельных решений уравнения (1.2) имеет вид

$$f = \Phi(C), \quad C = |p|^{-1} (3p + \xi)^2, \quad -\frac{2}{3} \xi = \int_{-\infty}^{\infty} p \Phi dp. \quad (1.3)$$

На рис. 1 показаны линии  $C = \text{const}$  в плоскости переменных  $(p, \xi)$ . Рассмотрим задачу Коши

$$f(\xi_0, p) = f_0(p), \quad -\frac{2}{3} \xi_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p f_0(p) dp. \quad (1.4)$$

Построим решение типа простой волны в области  $-\infty < p < \infty$ ,  $\xi_0 < \xi < \xi_1 < 0$ . Условия (1.4) обеспечивают непрерывное примыкание простой волны к заданному стационарному однородному по пространству

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фонд “Ведущие научные школы” (код проекта 00-15-96163).

решению  $f_0(p)$ . Как видно из рис. 1, для  $\xi > \xi_0$  решение задачи Коши (функции  $\Phi_i(C)$ ) однозначно определяется по начальным данным в областях  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 4, 5$ ), а в области  $\Omega_3$ , ограниченной жирной линией  $C = s_0 = -12\xi_0$  и прямой  $\xi = \xi_1$ , решение находится из дополнительных уравнений. Отметим, что задача Коши (1.4) некорректна для  $\xi < \xi_0$ , так как функция  $f_0(p)$  не может быть задана произвольно (характеристики пересекают линию, на которой заданы условия Коши в двух точках).

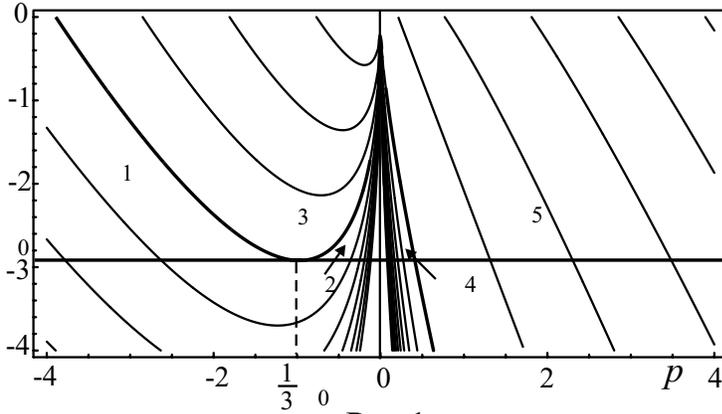


Рис.1

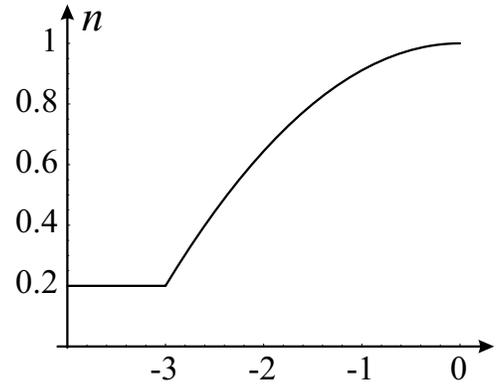


Рис.2

Для определения функции  $\Phi(C)$  в области  $\Omega_3$  используется последнее соотношение (1.3). Как показано в [3] оно сводится к интегральному уравнению второго рода

$$\Phi(C) = -\frac{1}{\pi} \int_C^{s_0} \frac{G'(s)}{\sqrt{s-C}} ds, \tag{1.5}$$

где

$$G(s) = \frac{4}{s\sqrt{s}} \left( F(s) - \int_s^{s_0} Q(C, s)\Phi(C) dC \right), \quad Q(C, s) = \sqrt{C}\sqrt{C-s} + \frac{(2C-s)^2 - s\sqrt{sC}}{4\sqrt{C}\sqrt{C-s}},$$

$$F(s) = -9s + \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\infty} (s-2C - K(C, s))\Phi_1(C) dC + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (s+2C + V(C, s))\Phi_5(C) dC - \\ - \frac{1}{2} \int_{s_0}^{\infty} (s-2C + K(C, s))\Phi_2(C) dC - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (s+2C - V(C, s))\Phi_4(C) dC,$$

$$V = \sqrt{C}\sqrt{C+s} + \frac{(2C+s)^2}{4\sqrt{C}\sqrt{C+s}}, \quad K(C, s) = \frac{s\sqrt{s}}{4\sqrt{C-s}} + Q(C, s), \quad s = -12\xi.$$

Функция  $G'(s)$  имеет особенность (обращается в бесконечность) в точке  $s = s_0$ . Представим функцию  $G'(s)$  в виде суммы регулярной (без особенностей) и сингулярной составляющих. В результате вычислений получим

$$G'(s) = R(s) - \frac{\Phi_1(s_0) + \Phi_2(s_0)}{2} \frac{s_0\sqrt{s_0}}{s\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s_0-s}}, \tag{1.6}$$

где  $R(s)$  — известная ограниченная функция (регулярная часть). На основе представления (1.6) функции  $G'(s)$  заключаем, что

$$\Phi(s_0) = \lim_{C \rightarrow s_0} \left( -\frac{1}{\pi} \int_C^{s_0} \frac{G'(s) ds}{\sqrt{s-C}} \right) = \frac{\Phi_1(s_0) + \Phi_2(s_0)}{2}.$$

Будем численно решать уравнение (1.5) методом последовательных приближений. Начальное  $\Phi_0(C)$  задается произвольно. По известному  $k$ -ому приближению вычисляется  $(k+1)$ -ое по формуле

$$\Phi_{k+1}(C) = -\frac{1}{\pi} \int_C^{s_0} \frac{G'_k(s) ds}{\sqrt{s-C}}, \tag{1.7}$$

где

$$G'_k(s) = -\frac{6}{s^2\sqrt{s}} \left( F(s) - \int_s^{s_0} Q(C, s)\Phi_k(C) dC \right) + \frac{4}{s\sqrt{s}} \left( F'(s) - \int_s^{s_0} Q_s(C, s)\Phi_k(C) dC \right).$$

Докажем однозначную разрешимость уравнения (1.5) и сходимость итерационного процесса (1.7). Введем банахово пространство  $\mathbf{B}$  непрерывных на отрезке  $[s_1, s_0]$  ( $0 < s_1 < s_0$ ) функций  $\Phi(C)$  с нормой  $|\Phi| = \max_C |\Phi(C)|$  и обозначения

$$H(\tau, s) = -\frac{1}{\pi} \frac{6}{s^2\sqrt{s}} Q(\tau, s) + \frac{1}{\pi} \frac{4}{s\sqrt{s}} Q_s(\tau, s), \quad \eta(C) = -\frac{1}{\pi} \int_C^{s_0} \left( \frac{4F'(s)}{s\sqrt{s}} - \frac{6F(s)}{s^2\sqrt{s}} \right) ds.$$

Зададим действие непрерывного отображения  $A$  пространства  $\mathbf{B}$  в себя по правилу

$$A\Phi = \int_C^{s_0} (s - C)^{-1/2} \left( \int_s^{s_0} H(\tau, s)\Phi(\tau) d\tau \right) ds.$$

Тогда уравнение (1.7) можно представить в виде  $\Phi_{k+1} = A\Phi_k + \eta$ .

Пусть  $\Phi_a(\tau), \Phi_b(\tau)$  произвольные элементы пространства  $\mathbf{B}$ . Покажем, что существует целое положительное значение  $m$  такое, что  $|A^m\Phi_a - A^m\Phi_b| \leq \gamma|\Phi_a - \Phi_b|$ , ( $0 < \gamma < 1$ ) т.е.  $m$ -ая степень оператора  $A$  — сжатие.

Функция  $Q(\tau, s)$  непрерывна в замкнутой области  $s_1 \leq s \leq s_0, s \leq \tau \leq s_0$ . Следовательно, это равномерно ограниченная функция и существует константа  $M_1$  такая, что  $|Q(\tau, s)| < M_1$ . Для производной  $Q_s(\tau, s)$  получаем оценку  $|Q_s(\tau, s)| \leq M_2(\tau - s)^{-1/2}$ . Поэтому функция  $H(\tau, s)$  имеет жорданову меру  $|H(\tau, s)| \leq M(\tau - s)^{-1/2}, M = M_1\sqrt{s_0 - s_1} + M_2$ . Используя эти неравенства оценим модуль разности

$$|A\Phi_a - A\Phi_b| \leq Ml \int_C^{s_0} (s - C)^{-1/2} \left( \int_s^{s_0} (\tau - s)^{-1/2} d\tau \right) ds = \pi Ml(s_0 - C),$$

где  $l = \max_{\tau} |\Phi_a(\tau) - \Phi_b(\tau)|$ . Аналогично оцениваем

$$|A^2\Phi_a - A^2\Phi_b| \leq \pi M^2 l \int_C^{s_0} (s - C)^{-1/2} \left( \int_s^{s_0} (\tau - s)^{-1/2} (s_0 - \tau) d\tau \right) ds = 2^{-1} \pi^2 M^2 l (s_0 - C)^2$$

и т.д. В итоге получим оценку  $|A^m\Phi_a - A^m\Phi_b| \leq \pi^m M^m (s_0 - s_1)^m l / m!$ . Очевидно, что для достаточно больших значений  $m$  выполняется неравенство

$$\frac{\pi^m M^m (s_0 - s_1)^m}{m!} < 1$$

и отображение  $A^m$  является сжатием.

На основе принципа сжимающих отображений [4] заключаем, что уравнение (1.5) имеет единственное решение, а итерационный процесс (1.7) сходится.

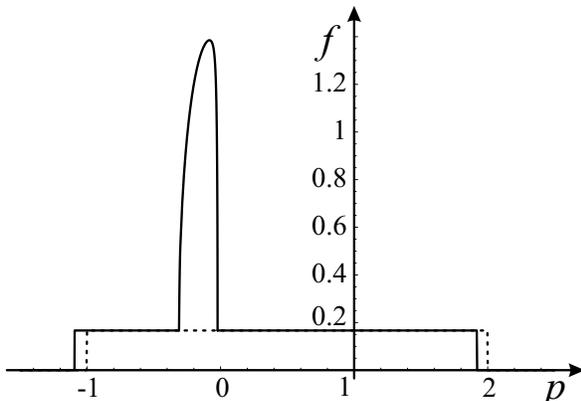


Рис. 3

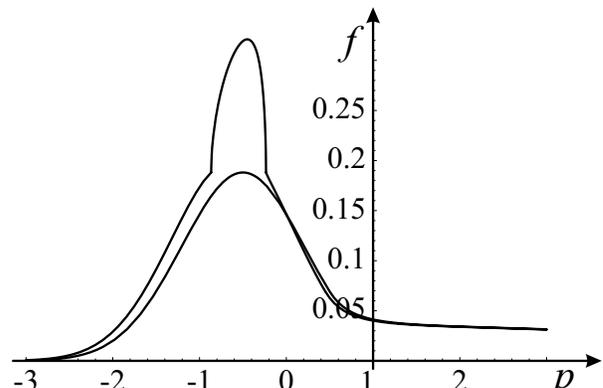


Рис. 4

Интегрированием (1.2) по переменной  $p$  находим, что функция  $n(t, x)$  (концентрация пузырьков ( $0 < n < 1$ )) удовлетворяет уравнению  $n_t + ((1 - n)j)_x = 0$ . На рассматриваемом классе простых волн его решение имеет вид

$$n(\xi) = 1 - (1 - n_0) \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^2, \quad n_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(p) dp. \quad (1.8)$$

Из (1.8) и рис. 2 следует, что в простой волне плотность  $n(\xi)$  возрастает и в пределе достигает единицы с убыванием  $|\xi|$  до нуля. Таким образом, при распространении простой волны происходит проникновение порции пузырьков в невозмущенную область.

На рис. 3 — 4 приведены графики функций распределения  $f_0(p)$  (начальные данные (1.4)) и автомодельные решения уравнения (1.2) при фиксированных значениях переменной  $\xi > \xi_0$ . В примере, показанном на рис. 3, распределение  $f_0(p)$  задано формулами:  $f_0 = 1/6$ ,  $p \in [-1, 2]$ , иначе  $f_0 = 0$  (изображено пунктиром). К этому распределению при  $\xi = \xi_0 = -3/8$  непрерывно примыкает простая волна (1.3). График функции  $f(\xi, p)$  приведен при  $\xi = -1/4$ . В области  $\Omega_3$  функция распределения имеет резкое возвышение.

Аналогичный пример решения для начальных данных (1.4) вида

$$f_0(p) = \begin{cases} (3\sqrt{\pi})^{-1} \exp(-(p + 1/2)^2), & \text{если } p \leq -1/2 \\ (6e\sqrt{\pi})^{-1} \left( (p + 1/2)^{-4} + \exp(\sigma(p - 1/2)^2) \right), & \text{если } p > -1/2 \end{cases}$$

( $\sigma \approx -0,01636$ ,  $\xi_0 = -1,5$ ,  $\xi = -1,35$ ) приведен на рис. 4.

**2. Решение линеаризованной задачи.** В уравнениях (1.2) перейдем к эйлерово-лагранжевым координатам  $t, x, \lambda$  с помощью замены переменных [2]:

$$t = t, \quad x = x, \quad p = p(t, x, \lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad (2.1)$$

где функция  $p(t, x, \lambda)$  — решение задачи Коши

$$p_t + (p - j)p_x = pj_x, \quad p(0, x, \lambda) = p_0(x, \lambda).$$

Для определения функций  $p(t, x, \lambda)$ ,  $f(t, x, \lambda)$  получаем систему

$$p_t + (p - j)p_x - pj_x = 0, \quad f_t + (p - j)f_x = 0, \quad j = \int_{-\infty}^{\infty} pp_\lambda f d\lambda. \quad (2.2)$$

Замена переменных (2.1) обратима при условии  $p_\lambda \neq 0$ . Пусть  $p_\lambda > 0$ .

Линеаризуем уравнения (2.2) на стационарном однородном по пространству решении  $p = p^0(\lambda)$  ( $p_\lambda^0 \neq 0$ ),  $f = f^0(\lambda)$ . Для этого представим функции  $p$  и  $f$  в виде

$$p(t, x, \lambda) = p^0(\lambda) + \varepsilon p'(t, x, \lambda), \quad f(t, x, \lambda) = f^0(\lambda) + \varepsilon f'(t, x, \lambda),$$

где  $p'(t, x, \lambda)$ ,  $f'(t, x, \lambda)$  — неизвестные функции (возмущения);  $\varepsilon$  — малый параметр. В дальнейшем штрих опускается. Интегродифференциальная система для определения возмущений имеет вид

$$p_t + (p^0 - j^0)p_x - p^0 j_x = 0, \quad f_t + (p^0 - j^0)f_x = 0, \quad (2.3)$$

$$j^0 = \int_{-\infty}^{\infty} p^0 p_\lambda^0 f^0 d\lambda, \quad j = \int_{-\infty}^{\infty} (pp_\lambda^0 f^0 + p^0 p_\lambda f^0 + p^0 p_\lambda^0 f) d\lambda.$$

Уравнения (2.3) по аналогии с нелинейной системой [2] эквивалентны соотношениям на характеристиках

$$R_t + (p^0 - j^0)R_x = 0, \quad f_t + (p^0 - j^0)f_x = 0, \quad (2.4)$$

где

$$R = -\frac{n}{p^0} - \frac{(1 - n^0)p}{(p^0)^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_\nu^0 f(t, x, \nu) d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p(t, x, \nu) - p(t, x, \lambda)) f_\nu^0 d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)},$$

$$n^0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\lambda^0 f^0 d\lambda, \quad n(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (p_\lambda(t, x, \lambda) f^0(\lambda) + p^0(\lambda) f(t, x, \lambda)) d\lambda.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (2.4) следующее

$$R(t, x, \lambda) = A(x - (p^0 - j^0)t, \lambda), \quad f(t, x, \lambda) = B(x - (p^0 - j^0)t, \lambda)$$

(функции  $A, B$  определяются начальными данными). Действительно, пусть имеются начальные данные  $p(0, x, \lambda) = p_0(x, \lambda)$ ,  $f(0, x, \lambda) = B(x, \lambda)$ . Тогда функция  $A$  будет найдена из представления инварианта  $R$ , подстановкой функций  $p_0$  и  $B$  вместо  $p$  и  $f$ . Для получения решения системы (2.3) необходимо выразить функцию  $p$  через инварианты Римана  $R$  и  $f$ . Эта задача решается путем обращения сингулярного интегрального оператора.

Преобразуем  $R$  к сингулярному интегральному уравнению [5] для определения функции  $p$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 - n^0}{p^0(\lambda)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^0(\nu) f_{\nu}^0 d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)} \right) p(t, x, \lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t, x, \nu) p^0(\nu) f_{\nu}^0 d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)} = \\ & = -p^0(\lambda) R(t, x, \lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^0(\nu) p_{\nu}^0 f(t, x, \nu) d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сделаем замену переменных  $z = p^0(\lambda)$ ,  $\xi = p^0(\nu)$  и введем функции

$$\Psi^{\pm}(z) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \tilde{f}_{\xi} \tilde{p}(\xi) d\xi}{\xi - z} \pm \pi i z \tilde{f}_z \tilde{p}(z) \right)$$

(зависимость от  $t, x$  как от параметров). Тогда уравнение (2.5) сводится к неоднородной задаче сопряжения

$$\Psi^{+}(z) = G(z) \Psi^{-}(z) + g(z),$$

где

$$G(z) = \frac{\chi^{+}}{\chi^{-}}, \quad \chi^{\pm}(z) = 1 - n^0 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \tilde{f}_{\xi}^0 d\xi}{\xi - z} \pm \pi i z^2 \tilde{f}_z^0, \quad g(z) = -\frac{\pi i z^2 \tilde{f}_z}{\chi^{-}(z)} \left( z \tilde{R}(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \tilde{f} d\xi}{\xi - z} \right).$$

Заметим, что функции  $\chi^{\pm}(z)$  с точностью до замены переменных совпадают с функциями

$$\chi^{\pm}(p) = 1 - n + p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_p dp'}{p' - p} \pm \pi i p^2 f_p$$

в терминах которых в [2] сформулированы условия гиперболичности уравнений (1.2). Пусть на решении  $p^0(\lambda), f^0(\lambda)$  условия гиперболичности ( $\Delta \arg \chi^{\pm}(p) = 0$ ,  $\chi^{\pm} \neq 0$ ) выполнены. Тогда, согласно [5], индекс задачи сопряжения равен нулю и решение дается формулой

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{\chi^{+}(\xi)(\xi - z)}.$$

Откуда находим, что  $p(z) = (\pi i z f_z)^{-1} (\Psi^{+}(z) - \Psi^{-}(z))$ . Проведя непосредственные вычисления и сделав обратную замену переменных, получим

$$p(t, x, \lambda) = p^0(\lambda) \left( \frac{\chi(\lambda)}{\chi^{+}(\lambda)\chi^{-}(\lambda)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^0(\nu) f_{\nu}(t, x, \nu) g(t, x, \nu) d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)} \right),$$

где

$$\chi(\lambda) = 1 - n^0 + p^0(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^0(\nu) f_{\nu}^0 d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)}, \quad g(t, x, \lambda) = -p^0(\lambda) R(t, x, \lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^0(\nu) p_{\nu}^0 f(t, x, \nu) d\nu}{p^0(\nu) - p^0(\lambda)}.$$

Таким образом, дано решение задачи Коши для линейной интегродифференциальной системы уравнений (2.3).

Для системы (2.3) можно построить пример Адамара некорректной постановки задачи Коши, если на рассматриваемом решении  $p = p^0(\lambda)$ ,  $f = f^0(\lambda)$  существуют комплексные корни характеристического уравнения

$$\chi(k + j) = 1 - n + (k + j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f p_{\lambda} d\lambda}{(p - k - j)^2} = 0.$$

Система (2.3) имеет решение

$$p = p^0(\lambda)(p^0(\lambda) - j^0 - k)^{-1} \exp(il(x - kt)), \quad f = \varphi(\lambda),$$

$k$  — комплексный характеристический корень ( $\text{Im}k > 0$ ),  $\varphi(\lambda)$  — произвольная функция. При  $l \rightarrow \infty$  функция  $p(0, x, \lambda)$  ограничена, но  $p(t, x, \lambda)$  при  $t > 0$  стремится к бесконечности. Отсутствие непрерывной зависимости решения от начальных данных указывает на некорректность задачи Коши при нарушении условий гиперболичности.

**3. Характеристическое уравнение в многомерном случае.** Линеаризуем уравнения (1.1) на решении  $f = f_0(\vec{p})$ . Для этого представим функцию распределения в виде  $f(t, \vec{x}, \vec{p}) = f_0(\vec{p}) + \varepsilon f'(t, \vec{x}, \vec{p})$  ( $\varepsilon$  малый параметр). Для определения малых возмущений  $f'$  получим систему (в дальнейшем штрих опускается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} &= 0, \quad \vec{u}_0 = \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{j}_0, \quad \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{j} - \frac{3}{2} \nabla \Phi, \\ \vec{F} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}}(\vec{p} \cdot \vec{u}), \Delta \Phi &= \text{div} \vec{j}, \quad \vec{j}_0 = \int \vec{p} f_0 d\vec{p}, \quad \vec{j} = \int \vec{p} f d\vec{p}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сделаем в уравнениях (3.1) преобразование Фурье по  $\vec{x}$ , преобразование Лапласа по времени  $t$  и введем обозначения

$$v(t, \vec{k}, \vec{p}) = \int_{R^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad g(s, \vec{k}, \vec{p}) = \int_0^\infty v(t, \vec{k}, \vec{p}) \exp(-st) dt.$$

После преобразований с учетом сделанных обозначений уравнения (3.1) сводятся к соотношениям

$$s g(s, \vec{k}, \vec{p}) - v(0, \vec{k}, \vec{p}) + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0 g(s, \vec{k}, \vec{p}) - \frac{i}{2} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( \vec{p} \cdot \vec{J} - \frac{3}{k^2} (\vec{p} \cdot \vec{k}) (\vec{k} \cdot \vec{J}) \right),$$

$$\vec{J} = \int_{R^3} \vec{p} g(s, \vec{k}, \vec{p}) dp_1 dp_2 dp_3.$$

Решая это уравнение относительно  $g$  и по другому группируя слагаемые получим

$$g(s, \vec{k}, \vec{p}) = \frac{1}{s + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0} \left( v(0, \vec{k}, \vec{p}) + \frac{i}{2} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( \vec{p} - \frac{3}{k^2} \vec{k} \cdot \vec{p} \right) \cdot \vec{J} \right). \quad (3.2)$$

В результате умножения (3.2) на  $p_l$ , (компоненты вектора  $\vec{p}$ ) и интегрирования по импульсам для определения  $J_l$  (компонент вектора  $\vec{J}$ ) возникает система линейных алгебраических уравнений. Приравняв к нулю определитель этой системы получаем характеристическое уравнение. В отличие от одномерного случая, рассмотренного в [1], характеристическое уравнение содержит нелинейные слагаемые и является достаточно сложным. В двумерном оно имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(s, \vec{k}) = & \left( \int \frac{p_1}{s + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( p_1 - \frac{3}{k^2} k_1 \vec{k} \cdot \vec{p} \right) d\vec{p} + \frac{i}{2} \right) \times \left( \int \frac{p_2}{s + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( p_2 - \frac{3}{k^2} k_2 \vec{k} \cdot \vec{p} \right) d\vec{p} + \frac{i}{2} \right) - \\ & - \left( \int \frac{p_1}{s + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( p_2 - \frac{3}{k^2} k_2 \vec{k} \cdot \vec{p} \right) d\vec{p} + \frac{i}{2} \right) \left( \int \frac{p_2}{s + i\vec{k} \cdot \vec{u}_0} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \left( p_1 - \frac{3}{k^2} k_1 \vec{k} \cdot \vec{p} \right) d\vec{p} + \frac{i}{2} \right). \end{aligned}$$

## Список литературы

- [1] RUSSO G., SMEREKA P. Kinetic theory for bubbly flow I: collisionless case // SIAM J. Appl. Math. 1996. Vol. 56. No. 2. P. 327 – 357.
- [2] Тешуков В. М. Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86 – 100.
- [3] Чесноков А. А. Точные решения одномерного кинетического уравнения Руссо–Смереки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 21–32.
- [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [5] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.