

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ОСНОВАННЫЙ НА АЛГЕБРАИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ

Д. К. ФИРСОВ

Томский государственный университет, Россия

e-mail: fkm@iao.ru

The finite-difference scheme on collocated grid for the Navier-Stokes equations in pressure-velocity variables in the non-orthogonal, curvilinear body-fitted coordinate system is considered. The new approximation method based on the algebraic decomposition of velocities in two parts is used to exclude fictitious oscillations of computational variables. Non-central finite difference scheme in approximation of continuity equation is used. Central-differences scheme for pressure gradient approximation is decomposed into two parts, so that their templates are opposite in direction.

Для решения задач гидродинамики широко используются конечно-разностные методы [1]. Как известно, конкретной конечно-разностной схеме, перенумеровав узлы сетки, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений [2, 3]. Поэтому в данной работе предполагается, что конечно-разностная схема, выписанная на заданной сетке, покрывающей область, и соответствующая ей система линейных уравнений есть одно и то же. Один из наиболее удобных способов нумерации узлов, которого придерживались в данной работе при записи систем линейных уравнений, соответствующих предложенным разностным схемам, является нумерация элементов в строку, затем в столбец и затем в глубину. То есть, узлу с номером i_1, i_2, i_3 , был поставлен в соответствие элемент с номером $n = i_3 \cdot (N_1 + 1) \cdot (N_2 + 1) + i_2 \cdot (N_1 + 1) + i_1$, где $0 \leq i_1 \leq N_1, 0 \leq i_2 \leq N_2, 0 \leq i_3 \leq N_3$.

В задачах, описывающих течение несжимаемой жидкости в областях сложной формы или с подвижной стенкой, используют неортогональную, криволинейную систему координат. Это приводит к необходимости использования неразнесенной сетки для расчета течений в переменных скорость-давление и как следствие этого использование центрально-разностных аппроксимаций для производных первого порядка. Шаблон такой аппроксимации не содержит центральной точки. Поэтому матрицы центрально-разностных аппроксимаций для производных первого порядка, участвующих в аппроксимациях операторов div и grad на неразнесенной сетке имеют непустое ядро, содержащее в себе всевозможные периодические колебания, что, несомненно, является одной из причин возникновения фиктивных колебаний расчетных величин по расчетной области и неустойчивости решений [4]. Многие авторы обходят эту проблему, вводя регуляризатор в уравнение неразрывности, как это было сделано в методе искусственной сжимаемости [1] и в работах [5, 6, 7]. Надежная регуляризация требует априорной информации о решении, что значительно усложняет поиск решения конкретных практических задач. Поэтому в данной работе предлагается новый способ конечно-разностной аппроксимации уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, который позволяет без ввода регуляризации строить матрицу системы линейных уравнений с пустым ядром.

1. Система определяющих уравнений

Уравнения Навье — Стокса для случая движения ньютоновской жидкости в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V^i + \frac{\partial}{\partial x^j} V^j V^i \right) - \mu \nabla V^i + \frac{\partial}{\partial x^i} P &= 0, \\ \text{div} V = \frac{\partial}{\partial x^i} V^i &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где, V — вектор скорости, заданный в каждой точке области и состоящий из компонент V^i , P — давление, μ — вязкость, ρ — плотность, i — номер координатного направления декартовой системы координат.

На практике исследователям чаще всего приходится изучать пространственные течения в каналах сложной геометрии, для которых не всегда удобно строить ортогональное преобразование исходной физической области на каноническую (стандартную) область. Поэтому возникает необходимость применения

неортогональных криволинейных координат, согласованных с геометрией области. Для перехода в неортогональную криволинейную систему координат y^1, y^2, y^3 из декартовой системы координат x^1, x^2, x^3 сделаем замену переменных $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$, такую чтобы якобиан перехода был положительным. Это дает возможность представить (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} U^j &= \frac{\partial y^j}{\partial x^k} V^k, \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V^i + \frac{\partial}{\partial y^j} U^j V^i + \left(U^j \frac{\partial}{\partial y^j} \ln(J) \right) V^i \right) - \mu \nabla V^i + \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} P = 0, \\ \operatorname{div} V &= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y^j} (J U^j), \quad \nabla^2 V^i = \sum_m \frac{\partial y^k}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{\partial y^L}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial y^L} V^i \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $U^j = \frac{dy^j}{dt}$ — скорости касательные к криволинейной неортогональной системе координат. Как уже отмечалось, при проведении вычислений в неортогональной, криволинейной системе координат удобней всего пользоваться неразнесенной, равномерной сеткой, в которой все расчетные величины вычисляются в одних и тех же узлах. Применение такой сетки приводит к необходимости использования центрально-разностных аппроксимаций для производных первого порядка, шаблоны которых не содержат центральных точек, что может привести к нефизическим осцилляциям расчетных величин [4, 5, 6, 7].

2. Новый способ дискретизации уравнений Навье — Стокса, основанный на алгебраическом разложении решения

Для исключения фиктивных колебаний расчетных величин при использовании неразнесенной сетки, нами был предложен новый способ аппроксимации уравнений Навье — Стокса [8], основанный на алгебраическом разложении скоростей на две части. Полагая $V = \frac{1}{2} (V_1 + V_2)$, перепишем систему (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (V_1^i + V_2^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(V_1^j \frac{1}{2} (V_1^i + V_2^i) \right) \right) - \mu \nabla^2 \frac{1}{2} (V_1^i + V_2^i) + \frac{\partial}{\partial x^i} P &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{1}{2} (V_1 + V_2) &= \frac{1}{2} \operatorname{div} V_1 + \frac{1}{2} \operatorname{div} V_2 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При построении дискретного аналога системы (3) будем исходить из следующих положений:

1. $\operatorname{div} V_1 + \operatorname{div} V_2 = Dv_1 V_1 + Dv_2 V_2 + o_1(h^k) + o_2(h^k)$, где $Dv_k = J^{-1} \cdot \delta_j^k \cdot J \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$, $k = \overline{1, 2}$ — аппроксимации операторов div , в которых для расчета производных $\frac{\partial}{\partial y^j}$ применены нецентрированные разностные схемы δ_j^1 и δ_j^2 соответственно. Операторы δ_j^1 и δ_j^2 выберем так, чтобы шаблоны производных были направлены в разные стороны. Например, для $Dv_1 = \frac{\partial}{\partial y^j} = \delta_j^1 + O_1(h_j^m) = \frac{1}{h_j} \sum_{i=0}^n \beta_i T_i^j + O_1(h_j^m)$ и в операторе $Dv_2 = \frac{\partial}{\partial y^j} = \delta_j^2 + O_2(h_j^m) = \frac{1}{h_j} \sum_{i=0}^n -\beta_i T_{-i}^j + O_2(h_j^m)$, где T_i^j оператор сдвига по расчетной сетке в направлении j на i узлов, β_i коэффициенты направленной разности. Если шаблон направленной разности в приграничной точке выходит за пределы расчетной области, то значения расщепленных скоростей за пределами области считаются равными значению, стоящему на границе. Данный способ приводит к тому, что матрицы, соответствующие аппроксимации $\frac{\partial}{\partial y^j}$ становятся треугольными, что благоприятно сказывается на обусловленности матрицы, соответствующей конечно-разностной схеме. В случае нецентрированных компактных разностей аппроксимацию можно проводить так же как для разностей третьего порядка следующим образом:

$$\Delta_j^k (s(k)) = \left(E + \frac{1}{6} \Delta_{j,2} - \frac{1}{4} s(k) \Delta_{j,0} \right)^{-1} \cdot 0.5 (\Delta_{j,0} - s(k) \Delta_{j,2}) / h_j, \quad (4)$$

где $s(k) = \begin{cases} 1, & k=1 \\ -1, & k=2 \end{cases}$, $\Delta_{j,2} = \frac{1}{2} (T_1^j - 2E + T_{-1}^j)$ и $\Delta_{j,0} = \frac{1}{2} (T_1^j - T_{-1}^j)$ [10], используя в граничных узлах нецентрированные конечные разности, направленные в ту же сторону и имеющие то же порядок точности, что и компактные.

Аппроксимация оператора grad проводится с использованием центральных разностей. Общий вид центрально-разностной аппроксимации для производных первого порядка может быть задан следующим соотношением: $\Delta_i = \frac{1}{h_i} \sum_{k=1}^n \alpha_k (T_k^i - T_k^i)$, причем $b = \sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0$. Разложим оператор Δ_i , аппроксимирующий первую производную вдоль координатного направления i на два: $\Delta_i = \frac{1}{2} (\Delta_i^1 + \Delta_i^2)$, где шаблоны Δ_i^1 и Δ_i^2 направлены в разные стороны таким образом, чтобы $\Delta_i^j S = 0$, если S постоянная величина по всей расчетной области. Поэтому элементы разложения центрально-разностного оператора, переводящие константу в ноль должны быть следующими:

$$\Delta_i^1 = -\frac{2}{h_i} \left(bE - \sum_{k=1}^n \alpha_k T_k^i \right), \quad \Delta_i^2 = \frac{2}{h_i} \left(bE - \sum_{k=1}^n \alpha_k T_{-k}^i \right). \quad (5)$$

В случае компактных центрированных разностных аппроксимаций, например четвертого порядка точности [10], которые имеют вид: $\Delta_i = Q^{-1} \delta^i$, где $Q = \frac{2}{3} E + \frac{1}{6} (T_1^i + T_{-1}^i)$, а $\delta^i = \frac{1}{2h_i} (T_1^i - T_{-1}^i)$ можно применить следующее разложение:

$$\Delta_i^1 = Q^{-1} \frac{1}{h_i} (T_1^i - E), \quad \Delta_i^2 = Q^{-1} \frac{1}{h_i} (E - T_{-1}^i). \quad (6)$$

Введем обозначение: $D_k = \tau_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Delta_j^k$, где τ_i — единичный вектор, направленный вдоль координатного направления i , и $D = \frac{1}{2} (D_1 + D_2)$ — центрально-разностный оператор аппроксимации градиента давления.

Граничные условия для каждой из компонент скоростей V_1^n и V_2^n задаются в точности такие, каким должна удовлетворять физическая скорость V^n . Здесь под $V^n = \begin{pmatrix} (V^1)^n \\ (V^2)^n \\ (V^3)^n \end{pmatrix}$ будем понимать приближенное решение системы дифференциальных уравнений (3) на временном слое n .

Обозначим через $A^n = \begin{pmatrix} W^n & 0 & 0 \\ 0 & W^n & 0 \\ 0 & 0 & W^n \end{pmatrix}$ разностный оператор на временном слое n , по главной диагонали которого стоят W^n , где $W^n (V^i)^{n+1}$ некоторая разностная аппроксимация следующей конвективно-диффузионной части $\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V^i + \frac{\partial}{\partial y^j} (U^j V^i) + \left(U^j \frac{\partial}{\partial y^j} \ln(J) \right) V^i \right) - \mu J^{-1} \frac{\partial}{\partial y^j} \left(J g^{j,m} \frac{\partial}{\partial y^m} V^i \right)$. Число операторов W^n на главной диагонали A^n совпадает с размерностью решаемой задачи.

Тогда дискретизацию неявной схемы для разрешения системы (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A^n & 0 & \frac{1}{2} D_1 \\ 0 & A^n & \frac{1}{2} D_2 \\ \frac{1}{2} D v_1 & \frac{1}{2} D v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{n+1} \\ V_2^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{V_1}^n \\ b_{V_2}^n \\ b_P^n \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$V^{n+1} = \frac{1}{2} (V_1^{n+1} + V_2^{n+1}).$$

где $b_{V_1}^n, b_{V_2}^n$ — возникают за счет дискретизации V по времени и граничных условий для V_j^n и давления, а b_P^n — возникает за счет граничных условий для V_1^n и V_2^n .

Для системы (7) можно построить итерационный процесс, аналогичный алгоритму SIMPLE [4]:

Утверждение 1. ([8] Утверждение 3)

Если после наложения граничных условий имеет место следующее:

1. Операторы B^n и A^n положительно определенные (A положительно определен, если $(Ax, x) > 0, \forall x \neq 0$).

2. Спектр операторов $D_1(C^n)^{-1} D v_1$ и $D_2(C^n)^{-1} D v_2$ состоит лишь из отрицательных чисел и нуля.

3. Операторы $D v_1 (A^n)^{-1} D_1$ и $D v_2 (A^n)^{-1} D_2$ имеют пустые ядра.

4. Справедливо следующее неравенство: $\| (B^n)^{-1} \| \cdot \| 2 \cdot A^n - \frac{1}{2} (D_1(C^n)^{-1} D v_1 + D_2(C^n)^{-1} D v_2) \| < 2$,

где $\| A \| = \| A \|_2 = \min_{(x,x)=1} \sqrt{(Ax, Ax)}$.

Тогда итерационный процесс:

$$\begin{cases} V_1^{m+1,n+1} = (E - (B^n)^{-1}A^n)V_1^{m,n+1} - (B^n)^{-1}D_1P^{m,n+1} + (B^n)^{-1}b_{V_1}^n \\ V_2^{m+1,n+1} = (E - (B^n)^{-1}A^n)V_2^{m,n+1} - (B^n)^{-1}D_2P^{m,n+1} + (B^n)^{-1}b_{V_2}^n \\ P^{m+1,n+1} = P^{m,n+1} - (C^m)^{-1}(Dv_1V_1^{m+1,n+1} + Dv_2V_2^{m+1,n+1} - b_P^n) \\ V^{m+1,n+1} = \frac{1}{2}(V_1^{m+1,n+1} + V_2^{m+1,n+1}) \end{cases} \quad (8)$$

сходится к решению $\begin{pmatrix} V^{n+1} \\ P^{n+1} \end{pmatrix}$ системы (7), где m — номера внутренних итераций.

3. Численная реализация алгоритма, основанного на алгебраическом разложении скоростей

При реализации (8), для обеспечения сходимости в качестве операторов C^m и B^n использовались константы. Расчетную сетку, согласованную с границами области получали с помощью эллиптического сеточного генератора [12],[13] из куба размером $1 \times 1 \times 1$, покрытого равномерной декартовой сеткой: $\Omega = \left\{ y = (y_{i_1}^1, y_{i_2}^2, y_{i_3}^3) \mid y_{i_\beta}^\beta = i_\beta \cdot h_\beta, h_\beta = 1/N_\beta, i_\beta = \overline{0, N_\beta}, \beta = \overline{1, 3} \right\}$.

Коэффициенты замены системы координат $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ вычислялись с помощью центральных разностей второго порядка точности во внутренних узлах и направленных разностей второго порядка в фиктивных и граничных узлах.

В настоящей работе не ставилась задача решения проблемы схемной вязкости [14], поэтому при аппроксимации конвективной части уравнений Навье — Стокса, использовалась противопоточная схема, имеющая первый порядок точности. Конечно-разностная аппроксимация, полученная так же как в [4] при этом имела вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} V^i + \frac{\partial}{\partial y^j} (U^j V^i) + \left(U^j \frac{\partial}{\partial y^j} \ln(J) \right) V^i - V^i \left(\frac{\partial}{\partial y^j} U^j + U^j \frac{\partial}{\partial y^j} \ln(J) \right) \right) \approx \\ \approx \left(a_P E - \sum_{j=0}^2 \left[a_E^j T_{+1}^j + a_W^j T_{-1}^j \right] \right) (V^i)^{n+1} + b^i, \\ a_E^j [i_1, i_2, i_3] = \rho Max \left(0, -\frac{((U^j)^{n+1} [i_1, i_2, i_3] + T_{+1}^j (U^j)^{n+1} [i_1, i_2, i_3])}{2 \cdot h_j} \right), \\ a_E^j [i_1, i_2, i_3] = \rho Max \left(0, \frac{((U^j)^{n+1} [i_1, i_2, i_3] + T_{-1}^j (U^j)^{n+1} [i_1, i_2, i_3])}{2 \cdot h_j} \right), \\ a_P = \sum_{j=1}^3 (a_E^j + a_W^j) + \frac{\rho}{\tau}, \quad b^i = \rho \frac{(V^i)^n}{\tau}. \end{aligned}$$

Где под коэффициентами a_P , a_E^j , a_W^j понимаем диагональные матрицы. А под $a_P [i_1, i_2, i_3]$, $a_n^j [i_1, i_2, i_3]$, элементы стоящие на главной диагонали матриц a_P , a_n^j , $n = E, W$ и одновременно соответствующие внутренним узлам $0 < i_1 < N_1, 0 < i_2 < N_2, 0 < i_3 < N_3$ расчетной сетки.

Диффузионную часть, так же как и конвективную, приближали во внутренних узлах конечными разностями второго порядка точности относительно пространственного шага:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y^k} \left(J g^{k,L} \frac{\partial}{\partial y^L} V^i \right) \approx \\ \approx \frac{1}{J} \left(c_P E - \sum_{j=1}^3 (c_E^j T_{+1}^j + c_W^j T_{-1}^j) + \sum_{k=1}^3 \sum_{L=1}^3 \frac{\delta^{k,L}}{4h_L h_k} (T_{+1}^k - T_{-1}^k) J g^{k,L} (T_{+1}^L - T_{-1}^L) \right) \cdot (V^i)^{n+1}, \\ c_E^j = \frac{(E + T_{+1}^j) J g^{j,j}}{2h_j^2}, \quad c_W^j = \frac{(E + T_{-1}^j) J g^{j,j}}{2h_j^2}, \quad c_P = \sum_{j=1}^3 (c_E^j + c_W^j). \end{aligned}$$

Многие авторы применяют для получения давления в граничных узлах экстраполяционные формулы [15], что может оказаться очень трудоемким, поскольку в этом случае уравнение неразрывности в граничных точках не удовлетворяется и давление в них в пространственном случае, в криволинейной, неортогональной системе координат зачастую следует получать за счет матричной прогонки. Поэтому, давление на границе находили с использованием разностного аналога уравнения неразрывности, полученного с применением разностей направленных в ту же сторону, что и во внутренних узлах. При этом значения расчетных величин в узлах лежащих вне области считались равными значениям на границе. В этом случае в граничных точках одна из расщепленных скоростей может удовлетворять уравнению

неразрывности, тогда как вторая будет удовлетворять уравнению неразрывности лишь в случае, когда полная скорость является решением уравнения неразрывности. Все это позволяет надежно определить давление в граничных точках.

При реализации алгоритмов основанных на разложении расчетных величин выбор направленных разностей в операторах Dv_j для (8), должен быть таким, чтобы их порядок аппроксимации не уменьшал порядок всей системы. Доказательство того, что спектр операторов и состоит лишь из отрицательных чисел и ноля и основывается на том, что:

1. Якобиан замены координат больше ноля.
2. Матрицы, соответствующие направленным разностям и полученные в результате разложения матриц, соответствующих центрально-разностным операторам, являются треугольными. Следовательно, на их диагоналях стоят одинаковые числа — положительные, если матрица ниже-треугольная, отрицательные, если матрица выше-треугольная. Легко доказать что, спектр треугольных матриц состоит лишь из элементов стоящих на главной диагонали.
3. Можно показать, что спектр $D_k (C^n)^{-1} Dv_k$ состоит лишь из отрицательных чисел. Для этого достаточно расписать $D_k (C^n)^{-1} Dv_k = \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \left[\Delta_m^k (C^n)^{-1} J^{-1} \delta_L^k J \right] \frac{\partial y^L}{\partial x^j}$ и учесть, что матрица, стоящая в квадратных скобках, содержит лишь отрицательные собственные значения.

Для апробации метода использовались разложения центрально-разностных операторов второго порядка точности (5). Вследствие того, что общий порядок точности алгоритма, за счет аппроксимации конвективных членов был первым, в качестве направленных разностей выбирались двух точечные аппроксимации первой производной с первым порядком точности. Для того чтобы показать независимость решения получаемого с помощью (8) от способа аппроксимации производных в операторах div и grad , были использованы компактные разности [10, 11], хорошо зарекомендовавшие себя для пространственных течений вязкого газа [16, 17]. В качестве центрально-разностного оператора брались центрированные компактные разности четвертого порядка точности [10] по пространственному шагу на двухточечном шаблоне, которые были разложены по формуле (6). В качестве направленных разностей выбирались нецентрированные компактные разности третьего порядка точности (4).

4. Примеры расчетов на существенно неортогональной сетке

По описанному выше алгоритму были проведены расчеты стационарного течения ньютоновской жидкости на существенно неортогональной сетке, полученной в сеточном генераторе из куба с декартовой сеткой, размер которой составлял $21 \times 21 \times 41$. Расчеты были проведены для $Re = \frac{\rho \bar{V} d}{\mu} = 400$ (где ρ плотность, μ вязкость, \bar{V} средняя скорость на входном профиле Пуазеля, а d диаметр входного отверстия). На стенках ставились условия прилипания, а на выходе условия свободного вытекания. Сравнение показало практически полное совпадение результатов расчетов по алгоритму (8) и по алгоритму описанному в [9] (рис. 2, табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Скорости U^2 по отношению к средней на входном профиле Пуазеля касательной к криволинейной системе координат для $y^2 = 0.5$, $y^3 = 0.902$.

I_1 — номер узла в направлении y^1	Компактные аппроксимации	Центральные разности	Разнесенная сетка [8]
2	0.840	0.869	0.817
5	1.776	1.787	1.771
8	2.055	2.056	2.066
11	2.095	2.094	2.119
14	1.983	1.983	2.019
17	1.749	1.752	1.795
20	1.110	1.116	1.077

Для искривленной трубы результаты расчетов, основанные на алгебраическом разложении скоростей, практически совпали с результатами, полученными с использованием разнесенной сетки [8] и оказались достаточно близкими к данным работы [18].

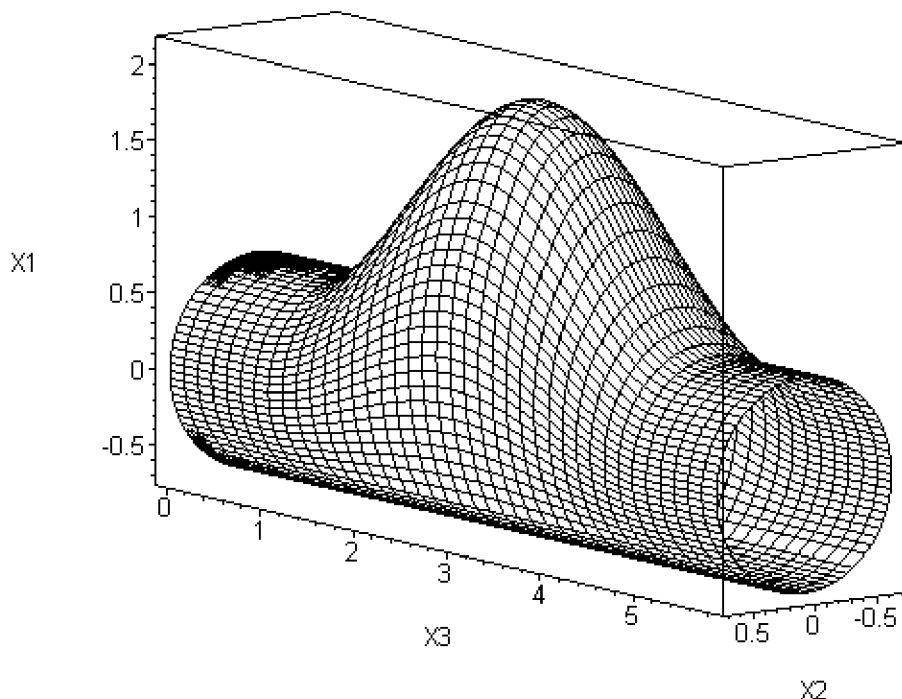


Рис. 1. Расчетная область — труба с несимметрическим вздутием, полученная из параллелепипеда размером $21 \times 21 \times 41$.

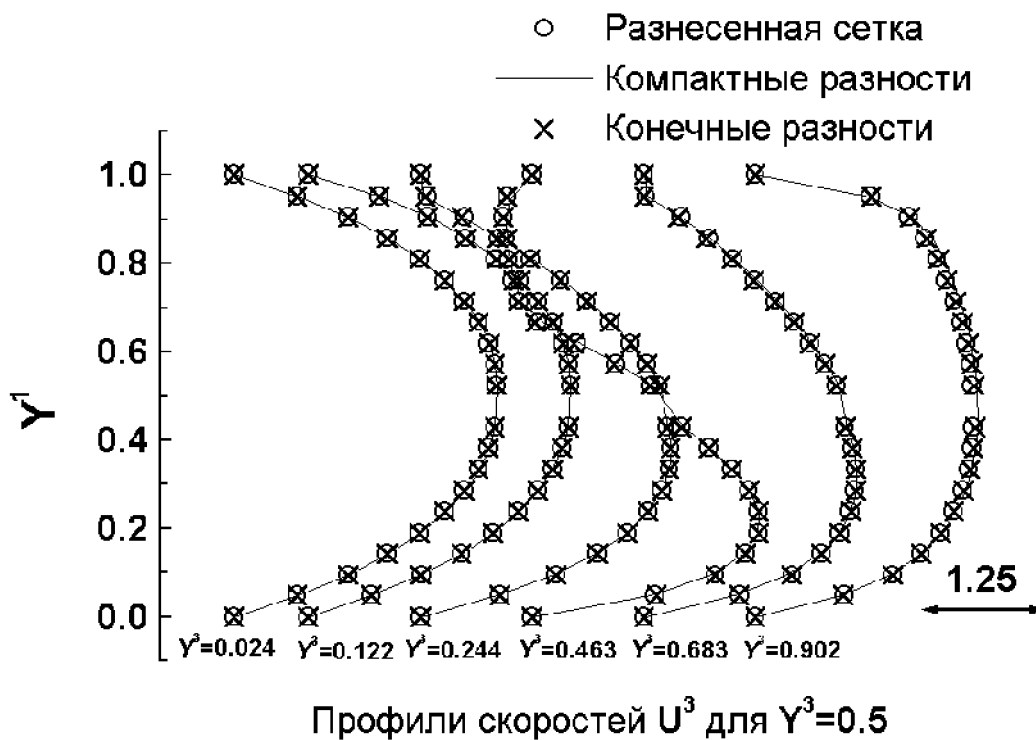


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов, полученных различными способами.

5. SIMPLE процедура для итерационной схемы (8)

Использование констант в качестве операторов, обеспечивающих сходимость в (8) оправдано, лишь на начальном этапе реализации нового алгоритма с целью его исследования, или в случае незначительных размеров расчетного пространства. Для расчета течений на больших сетках, в областях больших размеров необходимо использовать более сложные преобуславливающие матрицы. Поэтому для расчетов стационарных течений в трехмерных областях, имеющих значительное количество узлов и большие размеры, был реализован достаточно быстрый алгоритм со сложными операторами, обеспечивающими сходимость и второй порядок точности для уравнения неразрывности, а также разностного оператора градиента давления, где в качестве δ_L^k использовали $\frac{S}{h_j} \left(\frac{2}{3}E - 2T_{-S}^j + \frac{1}{2}T_{-2S}^j \right)$, а в качестве $\Delta_j^k = \frac{S}{h_j} (T_S^j - E)$, где $S = (-1)^{k+1}$, $k = \overline{1, 2}$.

В нашем случае A^n за счет противоположной дискретизации конвективных членов обладает свойством диагонального преобладания и поэтому в качестве оператора B^n в (8) брался оператор A^n .

Для того чтобы получить давление во всех точках расчетной области необходимо рассчитывать поправку давления по алгоритму (8) соответственно также во всех точках расчетной области. Поэтому для расчета поправки давления ввели фиктивные узлы, лежащие вне расчетной области. Так, если равномерная сетка по расчетной области в трехмерном случае имела вид

$\Omega = \left\{ y = (y_{i_1}^1, y_{i_2}^2, y_{i_3}^3) \mid y_{i_\beta}^\beta = i_\beta \cdot h_\beta, h_\beta = 1/N_\beta, i_\beta = \overline{0, N_\beta}, \beta = \overline{1, 3} \right\}$, то поправка давления считалась в следующей области:

$\overline{\Omega} = \left\{ y = (y_{i_1}^1, y_{i_2}^2, y_{i_3}^3) \mid y_{i_\beta}^\beta = i_\beta \cdot h_\beta, h_\beta = 1/N_\beta, i_\beta = \overline{-1, N_\beta + 1}, \beta = \overline{1, 3} \right\}$. В фиктивных узлах поправка была нулевой. В качестве C^n брали матрицу близкую к $-\frac{1}{2} \left(Dv_1 (d(A^n))^{-1} D_1 + Dv_2 (d(A^n))^{-1} D_2 \right)$, где $d(A^n)$ — диагональ A^n :

$$C^n = -\frac{L}{2} J^{-1} \sum_{j=1}^K \left((T_{+1}^j - E) J g^{j,j} d(A^n)^{-1} (E - T_{-1}^j) + (E - T_{-1}^j) J g^{j,j} d(A^n)^{-1} (T_{+1}^j - E) \right),$$

здесь L — некоторый эмпирически подбираемый параметр (в большинстве случаев $L = 2$), компенсирующий отсутствие в C^n аппроксимаций смешанных производных и разницу порядка аппроксимации уравнения неразрывности в C^n и $-\frac{1}{2} \left(Dv_1 (d(A^n))^{-1} D_1 + Dv_2 (d(A^n))^{-1} D_2 \right)$, K — размерность решаемой задачи, значения коэффициентов в фиктивных узлах брали из граничных узлов. В результате, в трехмерном случае, матрица C^n получилась семи диагональной, положительно определенной и за счет ввода фиктивных узлов обратимой.

Для решения системы уравнений с участием B^n применялся метод простой итерации [2], а для решения системы линейных уравнений с участием C^n явный метод Булеева (ЯМБ-3) [19]. Для увеличения скорости сходимости итерационной схемы, так же как в алгоритме SIMPLE[4] на основе поправки давления вычислялись поправки скоростей. В итоге получился следующий алгоритм для расчета стационарных течений несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} V_k^j &= (W^n)^{-1} \left((b_{V_k}^n)^j - \frac{\partial y^L}{\partial x^j} \Delta_L^k P^n \right), \quad k = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, K}; \\ P' &= C^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{J} \delta_m^1 J \frac{\partial y^m}{\partial x^j} V_1^j + \frac{1}{J} \delta_m^2 J \frac{\partial y^m}{\partial x^j} V_2^j - b_P^n \right); \quad P^{n+1} = P^n - P'; \\ V^j &= \frac{1}{2} (V_1^j + V_2^j), \quad j = \overline{1, K}; \quad (V^j)^{n+1} = V^j + (d(A^n))^{-1} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \Delta_{0,m} P', \quad j = \overline{1, K}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь n — номер итерации, $\Delta_{0,j} = \frac{1}{2h_j} (T_{+1}^j - T_{-1}^j)$ центрально-разностная аппроксимация производной $\frac{\partial}{\partial y^j}$, V^i — компоненты вектора скорости, где i — номер координатного направления декартовой системы координат, K — размерность решаемой задачи, $(b_{V_k}^n)^j$ — вектор получаемый за счет дискретизации V по времени и задания граничных условий для V_k^j и P , b_P^n получается за счет задания граничных условий для V_1^n и V_2^n . Итерационный процесс (9) необходимо продолжать до тех пор, пока норма разницы между итерациями не станет меньше некоторого наперед заданного числа, и в то же самое время не выполнится уравнение неразрывности [4].

В полученном алгоритме (9) для расчета стационарного течения, описанного в п. 4 потребовалось 930 итераций. При этом $\sum_{i=1}^3 \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \sum_{i_3=0}^{N_3} \left| (V^i[i_1, i_2, i_3])^{n+1} - (V^i[i_1, i_2, i_3])^n \right| < 10^{-3}$, а максимум невязки

уравнения неразрывности был меньше 10^{-4} . На персональном компьютере с одним процессором AMD DURON 700 МГц для расчета потребовалась 31 минута. Что примерно в 10 раз быстрее, чем в случае выбора констант для обеспечения сходимости.

Список литературы

- [1] ПЕЙРЕ РОЖЕ, ТЕЙЛОР ТОМАС Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
- [2] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [3] ХЕЙГЕМАН Л., ЯНГ Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 448 с.
- [4] ПАТАНКАР С. Уравнения методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Москва. Энергоатомиздат. 1984.-152с.
- [5] RHEE S.M., CHOW W.L. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation // AIAA Journal. 1983. Vol. 21, No. 11. P. 1525–1532
- [6] PIQUET J., VASSEUR X. Multigrid Preconditioned Krylov Subspace Method for Three-dimensional Numerical Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations. Numerical Algorithms. 1998. Vol. 17, No. 1, 2. P. 1–32.
- [7] SHEN JIE On new pseudocompressibility method for the incompressible Navier-Stokes equations. Appl. Numer. Math. 1996. Vol. 21, No. 1. P. 71–90.
- [8] ФИРСОВ Д.К., БУБЕНЧИКОВ А.М. Алгоритм расчета течений ньютоновской жидкости в естественных переменных в неортогональной системе координат на неразнесенной сетке. Библиогр. П наз. Депонент в ВИНТИ 27.12.00 № 3285-B00.
- [9] БУБЕНЧИКОВ А.М., ФИРСОВ Д.К. Нестационарное течение жидкости в канале произвольной геометрии. <http://www.ict.nsc.ru/ws/ct-2000/>
- [10] ТОЛСТЫХ А.И. Об итерационных схемах с нецентрированными компактными аппроксимациями // ДАН, Математика, 1992. Т. 326, № 3. С. 425–430
- [11] ТОЛСТЫХ А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
- [12] МАТРИУШОВ С.Н. Построение дву- и трехмерных сеток для задач газодинамики на основе уравнения Пуассона. Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. Т. 419, № 4. С. 108–110.
- [13] КАМЕРЕРО Р., РЕДДЖО М. Конечно-разностная схема для построения трехмерных координат, согласованных с конфигурацией элементов турбомашин. Американское общество инж. и мех. Теоретич. Основы инж. расчетов. М.: Мир. 1983. Т. 105, № 1. С. 159–166.
- [14] MALLINSON DAVIS. False diffusion in numerical fluid mechanics. Univ., of new south woks, School of mechanics and industry. Engineering report. 1972. FMT 1.
- [15] ЗАХАРЕНКОВ М.Н. Особенности разностных схем решения двумерных уравнений Навье—Стокса, связанные с постановкой граничных условий на твердой поверхности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 8. С. 1224–1236.
- [16] САВЕЛЬЕВ А.Д. Расчеты течений вязкого газа на основе компактных схем третьего порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 10. С. 1538–1551.
- [17] ТОЛСТЫХ А.И., ШИРОБОКОВ Д.А. О разностных схемах с компактными разностями пятого порядка для пространственных течений вязкого газа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 4. С. 71–85.
- [18] PATANKAR S.V., PRATAR V.S., SPALDING D.B. Prediction of laminar flow and heat transfer in helically coiled pipes // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 62, pt ., P. 539–551.
- [19] ИЛЬИН В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит. 1995. 288 с.