К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ФЛЮИДОВ.

Ш. КАЮМОВ
ТГТУ, Ташкент, Узбекистан
e-mail: sks_de@yahoo.com

This work is devoted to constructing of mathematical models of filtration of structural fluids and development of methods of their solving. For one – dimensional marginal tasks, when coefficients of differential equations are constant, approximate analytical solution is done. Two – dimensional marginal tasks are solved numerically by methods of fictive regions, residual variants of stream running, and on the unknown moving borders between different regions of filtration it was used the methods of shuttled iterations.

Известно, что в теории фильтрации существуют флюиды [1] рассматриваемые как однокомпонентные, но обладающие аномальными свойствами и при их движении в пористой среде область фильтрации разбивается на три части (зоны). Границы между этими зонами подвижны и неизвестны. Эти флюиды (называемые структурированные) при разрушенной и не разрушенной структуре ведут себя по разному, что влияет на подвижность и скорость фильтрации. Кроме того, в зависимости от значений градиента давления могут образоваться различные молекулярные связи, приводящие к так называемым, "пристеночным" эффектам, влияющие в свою очередь на скорость фильтрации. Таким образом при движении структурированных флюидов в пористой среде образуется несколько зон фильтрации: зона ползучести (в этой зоне структура флюида практически почти не разрушена); зона аномальной подвижности (связь между скоростью фильтрации и градиентом давления нелинейна); зона максимальной подвижности (флюид движется с максимальной скоростью и связь между скоростью фильтрации и градиентом давления линейна.) Кроме того, между каждыми зонами (на границе зон) возможно существование критических значений градиента давлений. Поэтому математическая модель движения структурированных флюидов в пористой среде содержит в себе дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа с граничными условиями на двух внутренних неизвестных и одной внешней известной границе. Решение задач такого типа намного труднее чем решение задачи трехфазной фильтрации, т.к. в последнем задается закон движения между фазами, а в структурированных флюидов эти законы не задаются и их изменение зависит прежде всего от интенсивности источника (скважины).

Предположим что область Ω содержит в себе структурированный флюид начальное состояние U_0 которого известно. Если из области Ω производится отбор флюида через скважины то начинается движение флюида вызванное работой этих скважин. При этом в их окрестности сразу образуется три зоны которые до определенного момента времени в зависимости от густоты распределения скважин существует как бы изолированно, т.е. возмущение одной области ещё не доходит до других возмущенных областей которые со временем начинают интерферировать вызывая сложные конфигурации. Математическая модель этой задачи при одномерном и двумерном случае формулируется следующим образом [2,3].

I. Одномерная задача.

Необходимо найти непрерывную функцию U(x,t) и неизвестные границы $R_{rj}^{\pm}(t)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right)=M(U)\frac{\partial U}{\partial t}+f(x,t), \qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$U(x,0)=\varphi_0(x), \quad x\in\widetilde{\Omega} \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\alpha_1\aleph_1\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=\varphi_1, \qquad t\geq 0 \tag{3}$$

$$\alpha_2\aleph_2\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=L}=0, \qquad t>0 \tag{4}$$

а также условиями неизвестных границах

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R^{\pm}_{r1\mp0}} = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R^{\pm}_{r1\pm0}} = \beta_1 \tag{5}$$

$$U(x,t)\Big|_{x=R^{\pm}_{r1\mp0}} = U(x,t)\Big|_{x=R^{\pm}_{r1\pm0}}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R^{\pm}_{r2\mp0}} = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=R^{\pm}_{r2\pm0}} = \beta_2, \tag{7}$$

$$U(x,t)\Big|_{x=R^{\pm}_{r2\mp0}} = U(x,t)\Big|_{x=R^{\pm}_{r2\pm0}}. \tag{8}$$

где

$$\Omega = \sum_{i=1}^{3} D_i \text{ и } D_1 = \left\{x;\ x_0 < x < R^{+}_{01}, \bigcup_r \left(R^{-}_{r1} < x < R^{+}_{r1}\right)\right\}$$

$$D_2 = \left\{x; \bigcup_r \left(R^{+}_{r1} < x < R^{+}_{r2};\ R^{-}_{r2} < x < R^{-}_{r1}\right)\right\},$$

$$D_3 = \left\{x; \bigcup_r \left(R^{+}_{r2} < x < R^{-}_{r1+2}\right)\right\}.$$

Коэффициенты $K, \aleph(U),\ M(U)$ а также $f(x,t)$ в зависимости от принадлежности *x* к области D_i примут соответствующие значения [3,4].

$U = \{U;\ \vartheta, \omega\}$ если $x \in \{D_1, D_2, D_3\}$ соответственно.

Для построения приближенно-аналитического решения задачи (1) - (8) применяем метод Бубкова-Галёркина, при этом предварительно считаем, что коэффициенты $K, \aleph(U),\ M(U)$, а также $\alpha_1\aleph_1, \alpha_2\aleph_2$ являются константами, функция $f(x,t)$ дискретная по *x*.

Согласно методу, решение представляется в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) Cos\left[n\pi \frac{x - R^{-}_{r1}}{R^{+}_{r1} - R^{-}_{r1}}\right] + F_1, \tag{9}$$

$$\vartheta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) Cos\left[n\pi \frac{x - R^{\pm}_{r1}}{R^{\pm}_{r2} - R^{\pm}_{r1}}\right] - F_2, \tag{10}$$

$$\omega(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) Cos\left[n\pi \frac{x - R^{+}_{r2}}{R^{-}_{r+1,2} - R^{+}_{r2}}\right] + F_3. \tag{11}$$

где

$$F_1 = \frac{\beta_1}{2(R^{+}_{r1} - R^{-}_{r1})}\left[\left(x - R^{-}_{r1}\right)^2 + \left(x - R^{+}_{r1}\right)^2\right],$$

$$F_2 = \frac{\beta_2}{2(R^{\pm}_{r2} - R^{\pm}_{r1})}\left[\left(x - R^{\pm}_{r2}\right)^2 + \left(x - R^{\pm}_{r1}\right)^2\right],$$

$$F_3 = \frac{\beta_2}{2(R^{-}_{r+1,2} - R^{-}_{r2})}\left[\left(x - R^{-}_{r+1,2}\right)^2 + \left(x - R^{\pm}_{r2}\right)^2\right]$$

– функции удовлетворяющее краевым условиям.

Неизвестные коэффициенты $C_n(t), S_n(t), Q_n(t),$ определяется подставкой решения (9), (10) и (11) в уравнении (1) и дальнейшем интегрированием обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно этих коэффициентов.

$$C_n(t)=e^{-\frac{a^{2t}}{M_1}}-\frac{2\beta_1 в}{(n\pi)^2}((-1)^n+1)-\frac{2}{a^2 в_{г}}\sum_{r=1}^{N-1}q_r\cos\left(n\pi\frac{x_r-R_{r1}^-}{в_r}\right)\left(1-e^{-\frac{a^2t}{M_1}}\right),\ n=1,2,3,...$$

$$C_0(t)=\frac{2}{M_1 в_r}\left(-\sum_{r-1}^{n-1}q_r-2\beta_1\right)t+\varphi_0-\frac{\beta_1}{3}\bullet в_r,$$

$$в_r=R_{r1}^+-R_{r1}^-,$$

$$S_n(t)=-2\beta d,e^{-\frac{a_1^2t}{M_2}}-2\beta\cos\left(n\pi\frac{x_r-R_{r1}^{\pm}}{d_r}\right)\left(1-e^{-\frac{a^2t}{M_2}}\right),$$

$$S_0(t)=\varphi_0-\frac{\beta}{3}d_r-\frac{4\beta}{M_2d_r},\qquad d_r=R_{r2}^{\pm}-R_{r1}^{\pm}.$$

$$Q_n(t)=-2\beta_2d_2,e^{-\frac{a_3^2t}{M_3}}(n\pi)^2,\qquad n=1,2...$$

$$Q_0(t)=\varphi_0-\frac{\beta_2}{3}d_2;\quad d_2=R_{r+1,2}^{-}-R_{r2}^{+}$$

где β содержится в коэффициенте $\aleph(U)$ когда $x\in D_2$.

Неизвестные границы, определяется итерационным методом. При этом внутри каждой зоны итерации можно провести методом "челночных" итераций [4]. Положения этих границ при каждом фиксированном t_k определяется проверкой выполнения условий

$$\Psi_1\left(R_{r1}^{\pm}\right)=U\left(R_{r1}^{\pm},t_k\right)-\vartheta\left(R_{r1}^{\pm},t_k\right),$$
$$\Psi_2\left(R_{r2}^{\pm}\right)=\vartheta\left(R_{r2}^{\pm},t_k\right)-\omega\left(R_{r2}^{\pm},t_k\right).$$

Итерация границ продолжается до выполнения условий $|\Psi_1|\le\varepsilon_1,\quad |\Psi_2|\le\varepsilon_2$.

II. Двумерная задача.

Требуется найти непрерывную функцию U(x,y,t) и неизвестные границы, G_r(x,y,t) из следующей дифференциально-краевой задачи [3]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial y}\right)=M(x,y,U,t)\frac{\partial U}{\partial t}+F(x,y,t),$$

$$(x,y)\in\Omega,t>0, \tag{12}$$

с начальными условиями

$$U(x,y,t_0)=U_0(x,y),(x,y)\in\bar{\Omega} \tag{13}$$

с краевыми условиями на Г

$$\left(a_1K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial n}+a_2U\right)_{(x,y)\in\Gamma}=\varphi(t) \tag{14}$$

и условиями на неизвестных границах G_1 u G_2

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(x,y)\in G_1-0}=\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(x,y)\in G_1+0}=\varphi_1, \tag{15}$$

$$U(x,y,t)\Big|_{(x,y)\in G_1-0}=U(x,y,t)\Big|_{(x,y)\in G_1+0}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(x,y)\in G_2-0}=\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{(x,y)\in G_2+0}=\varphi_2 \tag{17}$$

$$U(x,y,t)\Big|_{(x,y)\in G_2-0} = U(x,y,t)\Big|_{(x,y)\in G_2+0} \tag{18}$$

Здесь $\Omega = \{(x,y) : \partial(x,y) > 0\}$,

$$F(x,y,t) = vf(x,y,t); \quad f(x,y,t) = a_0 \sum_{r=1}^{n} q_r \delta(x - x_r, y - y_r),$$

$a_1 = \{0,1\}, a_2 = \{1,0\}$, δ - дельта функция.

Для упрощения изложения считаем $n = 1$. Тогда область $\Omega = \sum_{i=1}^{3} D_i$, где

$$D_1 = \{(x,y,t) : G_1(x,y,t) > 0\};$$
$$D_2 = \{(x,y,t) : (G_1(x,y,t) < 0) \cap (G_2(x,y,t) > 0)\};$$
$$D_3 = \{(x,y,t) : (G_2(x,y,t) < 0) \cap (\Gamma(x,y) > 0)\}.$$

$$\{K, \aleph(U), U\} = \begin{cases} \dfrac{K_m h}{\eta_m}, 1, U_1, \textit{если} \quad (x,y) \in D_1 \\ \dfrac{Kh}{\eta}, \aleph(U, |\nabla U|, \beta), U_2, \textit{если} \quad (x,y) \in D_2 \\ \dfrac{K_0 h}{\eta_0}, 1, U_3, \textit{если} \quad (x,y) \in D_3 \end{cases}$$

Коэффициенты $K_m, K_0, K, \eta, \mu, a_0$ и параметры $\varphi_1, \varphi_2, \nu, q_r$, а также функции $\aleph(U), U_i, (i = \overline{1,3})$ в зависимости от типов рассматриваемых флюидов принимают различные значения [3,4]. Если r>1 тогда до определенного момента времени в окрестности каждого источника будут существовать свои области D_1 и D_2, а области D_3 будет едина для всей области Ω. Граница области D_3 со временем уменьшается и через определенное время может исчезнуть. Аналогично область D_2 сначала будет расширятся и с исчезновением области D_3 начинает уменьшатся.

Аналитическое решение задачи (12) и (18) ввиду сильной нелинейности практически невозможно. Для решения данной задачи применяем метод фиктивных областей [5]. Тогда область Ω дополнится до четырёхугольника $\bar{\Omega}$. Дифференциальное уравнение (12), начальное условия (13) записывается для всей области $\bar{\Omega}$. Граничные условия (14) переносится на границу $\bar{\Omega}$.

При этом коэффициенты K, M и функции F(x,y,t), U_0 примет вид

$$\{K, M, F, U_0\} = \begin{cases} K, M, F, U_0 \quad \textit{если } (x,y) \in \Omega \\ \varepsilon K, \varepsilon M, 0, \varepsilon U_0 \quad \textit{если } (x,y) \in (\tilde{\Omega} - \Omega) \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ - малое число.

Введем функцию потока [4,6]

$$W_x(x,y,U,t) = K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial x}, \; W_y(x,y,U,t) = K\aleph(U)\frac{\partial U}{\partial y} \tag{19}$$

тогда (12) примет вид

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = M(x,y,U,t)\frac{\partial U}{\partial t} + F(x,y,t), \quad (x,y) \in \tilde{\Omega}, t > 0. \tag{20}$$

Если ввести дифференциальный оператор

$L_1 W_x = \dfrac{\partial W_x}{\partial x}$ *и* $L_2 W_y = \dfrac{dW_y}{dy}$, то (20) примет вид

$$L_1 W_x + L_2 W_y = M(U)\frac{dU}{dt} + F \tag{21}$$

Применяя метод прямых по $t(t_k = k\tau)$ с дробным шагом $\tau/2$ и одновременно для нелинейных коэффициентов метод итерации $M(U^{s-1})$, $\aleph(U^{s-1})$ на каждом шаге t_k, а также метод переменных направлений по пространственным переменным x и y из (21) получим

$$L_1 W_x^{k+\frac{1}{2}} = \frac{M^{(s-1)}(U^{k+1/2})}{0{,}5\tau}(U^{k+1/2} - U^k) - L_2 W_y^k + f^{k+1/2}, \tag{22}$$

$$L_2 W_y^k = \frac{M^{(s-1)}(U^{k+1})}{0{,}5\tau}(U^{k+1} + U^{k+1/2}) - L_1 W_x^{k+1/2} + f^{k+1}. \tag{23}$$

Интегрируя уравнения (22) на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ при фиксированном y_j, а также уравнения (23) на отрезке $y_{i-1/2}, y_{i+1/2}$ при фиксированном x_i и далее применяя теорему о среднем для коэффициентов $M^{(s-1)}$ и операторов $L_2 W^k$ и $L_1 W^{k+1/2}$, а также функций $f^{k+1/2}$ и f^{k+1} после некоторых упрощений получим систему разностных уравнений

$$W_{x,i+1/2,j}^{k+1/2} - W_{x,i-1/2,j}^{k+1/2} = \frac{M^{(s-1)}(U_{ij}^{k+1/2})}{0{,}5\tau}(U_{ij}^{k+1/2} - U_{ij}^k)h_{1i} - L_2 W_{y,ij}^k h_{ij} + f_{ij}^{k+1/2} h_{1i}, \tag{24}$$

$$W_{x,i-1/2,j}^{k+1/2} = K_{i-1/2,j}\aleph_{i-1/2,j}^{s-1}(U_{ij}^{k+1/2} - U_{i-1,j}^{k+1/2})/h_{1,i-1/2},$$

$$W_{y,i,j+1/2}^{k+1} - W_{y,i,j-1/2}^{k+1} = \frac{M^{(s-1)}(U_{ij}^{k+1})}{0{,}5\tau}(U_{ij}^{k+1} - U_{i,j}^{k+1/2})h_{2,j} - -L_1 W_{x,ij}^{k+1/2} h_{2j} + f_{ij}^{k+1/2} h_{2j}, \tag{25}$$

$$W_{y,i,j-1/2}^{k+1} = K_{i,j-1/2}\aleph_{i,j-1/2}^{s-1}(U_{ij}^{k+1} - U_{i,j-1}^{k+1})/h_{2,j-1/2},$$

$$i = \overline{1, \overline{N}_1 - 1}; \quad j = \overline{1, \overline{M}_1 - 1}.$$

Перепишем эти уравнения в удобном виде

$$\left.\begin{aligned} &\overline{W}_{x,i+1/2,j} - \overline{W}_{x,i-1/2,j} - C_{ij}\overline{U}_{ij} = -d_{ij}, i = \overline{1, \overline{N} - 1} \\ &\overline{W}_{x,i-1/2,j} = \frac{a_{ij}}{h_{1,i-1/2}}(\overline{U}_{ij} - \overline{U}_{i-1,j}), \ i = \overline{1, \overline{N}_1} \end{aligned}\right\}, \tag{26}$$

$$W_{y,i,j+1/2} - W_{y,i,j-1/2} - \widetilde{C}_{ijUij} = -\widetilde{d}_{ij}, \ j = \overline{1, \overline{M}_1 - 1}, \tag{27}$$

$$W_{y,i,j+1/2} = \frac{в_{ij}}{h_{2,j-1/2}}(U_{ij} - U_{i,j-1}), \quad j = \overline{1, \overline{M}_1},$$

где $\overline{W} = W^{k+1/2}, W = W^{k+1}, \overline{U} = U^{k+1/2}, U = U^{k+1}$,

$$C_{ij} = \frac{M^{s-1}(\overline{U})}{0{,}5\tau}h_{1i}, \ d_{ij} = C_{ij}U_{ij}^k - f_{ij}^{k+1/2}h_{1i},$$

$$\widetilde{C}_{ij} = \frac{M^{s-1}(U)}{0{,}5\tau}h_{2j}, \ \widetilde{d}_{ij} = \widetilde{C}_{ij}U_{ij}^{k+1/2} - f_{ij}^{k+1}h_{2j},$$

$$U_{ij}^k = U(x_i, y_j, t_k),$$

при этом начальное условие (13) имеет вид $U_{ij}^0 = U_0(x_i, y_j)$. (28)

Для определенности считаем $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ и расщепляя производную по нормали в краевой условии (14) получим

$$W_x\Big|_{(i,j)\in\Gamma} = \overline{\varphi}, \ W_y\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi. \tag{29}$$

Аналогично записывается условие на неизвестных сеточных границах G_1 и G_2, которое примет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left|W_{ij}\right\|_{(i,j)\in G_{1-0}} = \left|W_{ij}\right\|_{(i,j)\in G_{1+0}} = \widetilde{\varphi}_1\\
&U_{ij}\Big|_{(i,j)\in G_{1-0}} = U_{ij}\Big|_{(i,j)\in G_{1+0}}\\
&\left|W_{ij}\right\|_{(i,j)\in G_{2-0}} = \left|W_{ij}\right\|_{(i,j)\in G_{2+0}} = \widetilde{\varphi}_2\\
&U_{ij}\Big|_{(i,j)\in G_{2-0}} = U_{ij}\Big|_{(i,j)\in G_{2+0}}
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Для решения задачи (26) - (30) предположим, что между потокам W и функцией U существует связь:

$$W_{x,\, i+1/2,\, j} = A_{ij}U_{ij} + B_{ij} \tag{31}$$

$$W_{y,\, i,\, j+1/2} = \overline{A}_{ij}U_{ij} + \overline{B}_{ij} \tag{32}$$

где A_{ij}, B_{ij} и $\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_{ij}$ неизвестные коэффициенты определяемые из соотношений (31), (24) и (32), (25).

$$\begin{cases}
A_{ij} = C_{ij} + {a_{ij}A_{i-1,j}}\Big/\left(a_{ij} + h_{1i}A_{i-1,j}\right),\\
B_{ij} = -d_{ij} + {a_{ij}B_{i-1,j}}\Big/\left(a_{ij} + h_{1i}A_{i-1,j}\right),
\end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases}
\overline{A}_{ij} = \overline{C}_{ij} + {\widetilde{a}_{ij}\overline{A}_{i,j-1}}\Big/\left(\widetilde{a}_{ij} + h_{2i}\overline{A}_{i,j-1}\right),\\
\overline{B}_{ij} = -\overline{d_{ij}} + {\widetilde{a}_{ij}B_{i,j-1}}\Big/\left(\widetilde{a}_{ij} + h_{2i}\overline{A}_{i,j-1}\right),
\end{cases} \tag{34}$$

где

$$A_{0,j} = {h_{1,0}C_{0,j}}\Big/2\,, \quad B_{0,j} = \overline{\varphi}_0 - {h_{1,0}d_{0,j}}\Big/2\,, \tag{35}$$

$$\overline{A}_{i,0} = {h_{2,0}\widetilde{C}_{i,0}}\Big/2\,, \quad \overline{B}_{i,0} = \varphi_0 - {h_{2,0}\overline{d}_{i,0}}\Big/2\,, \tag{36}$$

Значения функций на крайних прямых y_i и x_i вычисляется из соотношений

$$\overline{U}_{N,j} = \left(\overline{\varphi}_N - {d_{N,j}h_{1N}}\Big/2 - B_{N,j}\right)\Big/\left(A_{N,j} - {C_{N,j}h_{1,N}}\Big/2\right) \tag{37}$$

$$U_{i,M} = \left(\varphi_M - {\widetilde{d}_{i,M}h_{2M}}\Big/2 - \overline{B}_{i,M}\right)\Big/\left(A_{i,M} - {C_{i,M}h_{2,M}}\Big/2\right) \tag{38}$$

Формулы для вычисления искомой функции $U_{i-1,j}$ и $U_{i,j-1}$ получим из (31), (32) и (24), (25)

$$\overline{U}_{i-1,j} = \frac{a_{ij}}{A_{i-1,j}h_{1i} + a_{ij}}\overline{U}_{i,j} - \frac{B_{i-1,j}h_{1,i}}{A_{i-1,j}h_{1,i} + a_{ij}} \tag{39}$$

$$U_{i,j-1} = \frac{\widetilde{a}_{ij}}{\overline{A}_{i-1,j}h_{2i} + \widetilde{a}_{ij}}U_{i,j} - \frac{\overline{B}_{i-1,j}h_{2,i}}{\overline{A}_{i-1,j}h_{2,i} + \widetilde{a}_{ij}} \tag{40}$$

Поток W_x и W_y определяется по формулам (31) и (32) либо по формулам

$$\overline{W}_{x,N_1+1/2,j} = A_{N_1,j}\overline{U}_{N_1,j} + B_{N_1,j},$$

$$\overline{W}_{x,i-1/2,j}=\left(1-\frac{C_{ij}}{A_{ij}}\right)\overline{W}_{x,i+1/2,j}+\frac{C_{ij}B_{ij}}{A_{ij}}+d_{ij}\ , \tag{41}$$

$$W_{y,i,M_1+1/2}=\overline{A}_{i,M_1}U_{i,M_1}+\overline{B}_{i,M_1},$$

$$W_{y,i,j-1/2}=\left(1-\frac{\overline{C}_{ij}}{\overline{A}_{ij}}\right)W_{x,i,j+1/2}+\frac{\overline{C}_{ij}\overline{B}_{ij}}{\overline{A}_{ij}}+\overline{d}_{ij} \tag{42}$$

Неизвестные границы $\overline{G_1}=G_1(x_i,y_i,t_{k+1/2})$, $\overline{G_2}=G_2(x_i,y_i,t_{k+1/2})$, $G_1=G_1(x_i,y_i,t_{k+1})$, $G_2=G_2(x_i,y_i,t_{k+1})$ определяется проверкой условий

$$\overline{R}_{\overline{G}_1^+,j}=\overline{A}_{\overline{G}_1^+,j}\overline{U}_{\overline{G}_1^+,j}+B_{\overline{G}_1^+,j}-{h_{1,\overline{G}_1^+}\left(C_{\overline{G}_1^+,j}U_{\overline{G}_1^+,j}-d_{\overline{G}_1^+,j}\right)}\Big/2-\widetilde{\varphi}_1=0 \tag{43}$$

в случае, когда $\overline{G}_1^+$ совпадает с узлом x_i

$$R_{\overline{G}_1^+,j}=A_{\overline{G}_1^+-1/2,j}U_{\overline{G}_1^+-1/2,j}+B_{\overline{G}_1^+-1/2,j}-\widetilde{\varphi}_1=0\ , \tag{44}$$

в случае когда $\overline{G}_1^+$ совпадает с узлом $x_{i+1/2}$, на $\overline{G}_1^-$ используются условия

$$A_{\overline{G}_1^-,j}=0,\qquad B_{\overline{G}_1^-,j}=\widetilde{\varphi}_1\,. \tag{45}$$

Аналогично определяется граница возмущений по направлению y_j:

если $\overline{G}_1^+$ совпадает с узлом y_j

$$R_{i,G_1^+}=\overline{A}_{i,G_1^+}U_{i,G_1^+-1/2}+\overline{B}_{i,G_1^+}-{h_{2,G_1^+}\left(\widetilde{C}_{i,G_1^+}U_{i,G_1^+}-\widetilde{d}_{i,G_1^+}\right)}\Big/2-\varphi_1=0 \tag{46}$$

если G_1^+ совпадает с узлом $y_{i+1/2}$

$$R_{i,G_1^+}=A_{i,G_1^+-1/2}U_{i,G_1^+-1/2}+B_{i,G_1^+-1/2}-\varphi_1=0 \tag{47}$$

на G_1^- имеем

$$\overline{A}_{i,G_1^-}=0,\qquad B_{i,G_1^-}=\widetilde{\varphi}_1 \tag{48}$$

Для определения границы G_2^+ и G_2^- используется аналогичное условие типа (43)-(48). Технология вычисления следующая:

Прогоночные коэффициенты A_{ij}, B_{ij}, $\overline{A}_{ij}$, $\overline{B}_{ij}$ вычисляются с использованием соотношений (33)-(36) и (45)-(48) по прямому направлению. Ловля неизвестных границ G_1 и G_2, проводится из соотношений (43), (44) и (46), (48), где они меняют знак. Определение значений функций U_{ij} и $\overline{U}_{ij}$ происходит по формулам (37)-(38), а потоки W_x и W_y по формулам (40)-(42) на обратном направлении. Неизвестные границы уточняются методом "челночных" итераций [4].

На следующем шаге времени технология определения искомых функций аналогична, только в качестве нулевого приближения берётся значение вычисленных в предыдущем шаге функций.

Список литературы

[1] Левашкевич В.Г. Зависимость вязкости, подвижности и скорости фильтрации аномально-вязкой нефти от градиента давления. Известия ВУЗов серия “Нефть и газ”. №11. 1982. С.58-63.

[2] Хамдамов Р., Каюмов Ш.Ш. О некоторых проблемах возникающих при математическом моделировании задачи фильтрации структурированных флюидов. Сборник научных трудов Республиканской научно-практической конференции молодых ученых. Ташкент: 1997. Т.1, с. 39-41.

[3] Каюмов Ш. К решению многомерных задач теории фильтрации структурированных флюидов. Сборник трудов научной конференции “Автоматизация-97” Ташкент. 1997. С.67-68.

[4] Каюмов Ш. Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. Ташкент: ФАН. 1991. 156 с.
[5] Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука. СО АНСССР, 1988. 166 с.
[6] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1977. 562 с.