

# ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ РИЧАРДСОНА В ЗАДАЧАХ АДВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

А. В. ЩЕРБАКОВ, В. В. МАЛАХОВА

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирск, Россия*

e-mail: scherbak@sscc.ru

Ф. А. ЕРЕМЕЕВ

*Новосибирский государственный университет, Россия*

It is offered to use Richardson's extrapolation at the base of up-wind scheme. Four difference problems with double grid step at every grid point is solving simultaneously in one iteration process, which one allows to receive a difference solution with the doubled grid step for all grid points. The effect of this approach illustrated on examples of a solution of two problems of advection and advective-diffusive transport.

## 1. Введение

При моделировании глобального океанского климата, когда адвекция преобладает над диффузией, трудно добиться достаточного разрешения как по горизонтальным, так и по вертикальной координате, чтобы использовать для аппроксимации адвективных слагаемых симметричные разности. В случае грубого пространственного разрешения, даже если осцилляции разностного решения отсутствуют за счет неравномерности вертикальной сетки, получающееся разностное решение может качественно меняться при уменьшении шага сетки [1]. Применение схем с разностями вверх по потоку вносит большую вычислительную вязкость, а точнее, схемную диффузию.

Достаточно эффективно в таких задачах исключение схемной диффузии с помощью экстраполяции Ричардсона, когда на каждом шаге по времени задача решается на двух вложенных сетках с шагом  $h$  и  $2h$  [2]. Линейная комбинация двух плохих решений первого порядка точности позволяет получить более точное решение, свободное от схемной диффузии, со вторым порядком точности. Недостатком этого метода является получение уточненного решения на более грубой сетке с шагом  $2h$ , что приводит к неизбежной интерполяции, которая может свести на нет все уточнения. Для преодоления этого недостатка предлагается одновременно решать четыре разностные задачи с двойными шагами в одном итерационном процессе, который позволяет получить разностное решение с удвоенным шагом для всех точек исходной сетки, и тем самым снять проблему интерполяции.

## 2. Задача адвективно-диффузионного переноса

Рассмотрим в прямоугольной области  $G$  с границей  $\Gamma$  краевую задачу первого рода [2]

$$-\epsilon \Delta \psi + a(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = f(x, y), \quad (1)$$

$$\psi(x, y)|_{\Gamma} = 0,$$

где  $a(x, y) = y - 2,5$ ,  $b(x, y) = 1$ ,  $f(x, y) = 1$ ,  $\epsilon = 0.01$ . Дифференциальный оператор уравнения для безразмерных переменных описывает поведение интегральной функции тока.

В области  $G = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 5\}$  построим сетку  $G^h$  с равномерными шагами  $\Delta x = 1/N$ ,  $\Delta y = 1/M$ , где  $N, M$  — число узлов по осям. На сетке  $G^h$  аппроксимируем уравнение (1) схемой направленных

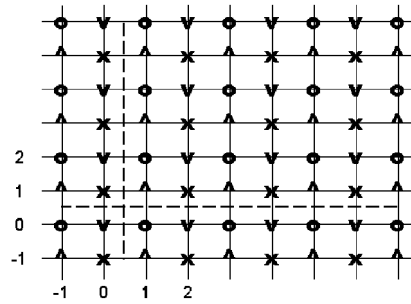


Рис. 1. Построение сетки  $G^h$ :  $\circ - G_1^{2h}, \nabla - G_2^{2h}, \wedge - G_3^{2h}, \times - G_4^{2h}, G^h \supset G_1^{2h}, G^h \supset G_2^{2h}, G^h \supset G_3^{2h}, G^h \supset G_4^{2h}, G^h = G_1^{2h} \cup G_2^{2h} \cup G_3^{2h} \cup G_4^{2h}$ . Пунктиром обозначена граница области.

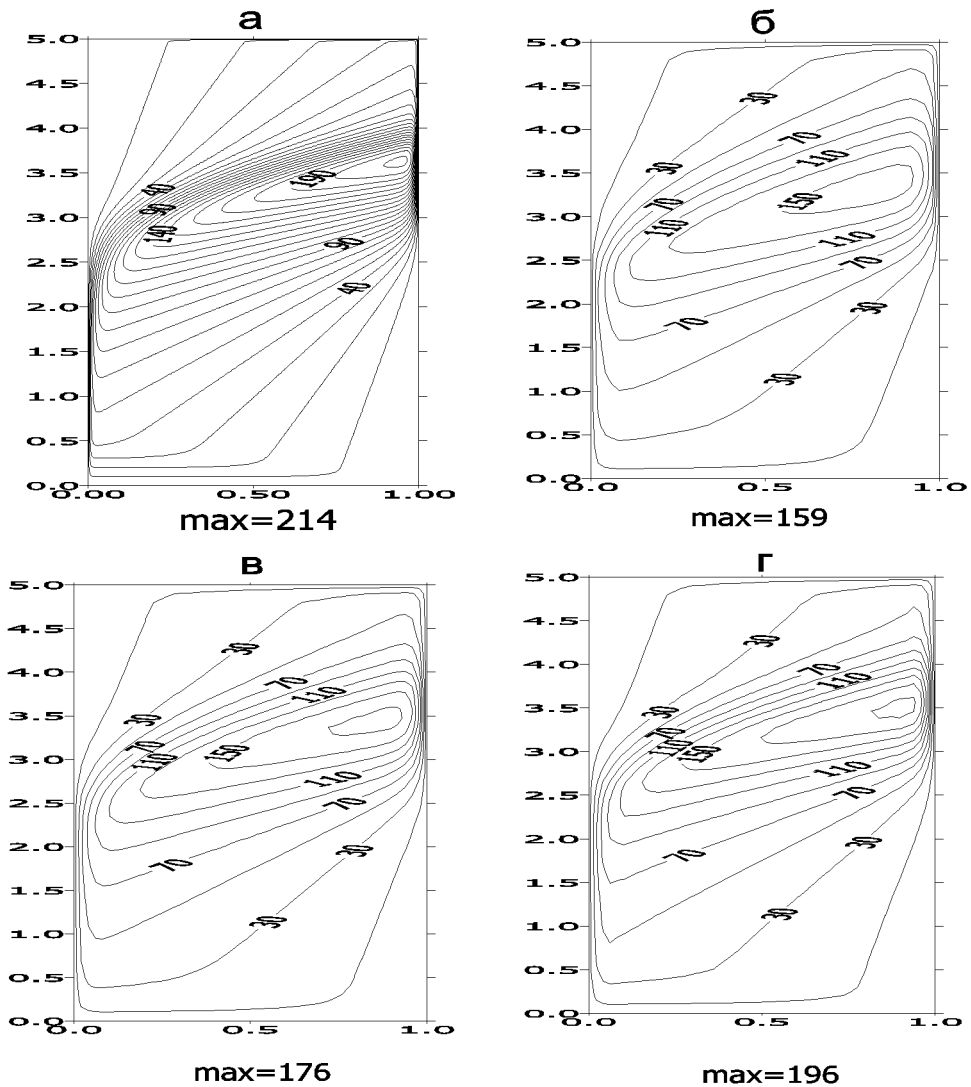


Рис. 2. Изолинии разностного решения задачи (1): а) по симметричной схеме при  $N = 300$ , б) с шагом  $2h$  при  $N = 40$ , в) с шагом  $h$  при  $N = 40$ , г) “корректор”.

разностей

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon \frac{\psi_{ij-1} - 2\psi_{ij} + \psi_{ij+1}}{\Delta x^2} - \epsilon \frac{\psi_{i-1j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i+1j}}{\Delta y^2} + \\
 & + \frac{a_{ij-1/2} + |a_{ij-1/2}|}{2} \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{\Delta x} + \frac{a_{ij+1/2} - |a_{ij+1/2}|}{2} \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij}}{\Delta x} + \\
 & + \frac{b_{i-1/2j} + |b_{i-1/2j}|}{2} \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{\Delta y} + \frac{b_{i+1/2j} - |b_{i+1/2j}|}{2} \frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{\Delta y} = f_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Эта схема имеет первый порядок аппроксимации, является монотонной и обладает большой схемной вязкостью, превышающей физическую. Наряду с сеткой  $G^h$  введем сетку  $G^{2h}$  с шагами  $2\Delta x, 2\Delta y$  такую, что все её узлы совпадают с узлами  $G^h$ . На сетке  $G^{2h}$  также аппроксимируем уравнение (1) схемой направленных разностей

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon \frac{\psi_{ij-2} - 2\psi_{ij} + \psi_{ij+2}}{4\Delta x^2} - \epsilon \frac{\psi_{i-2j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i+2j}}{4\Delta y^2} + \frac{a_{ij-1} + |a_{ij-1}|}{2} \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-2j}}{2\Delta x} + \frac{a_{ij+1} - |a_{ij+1}|}{2} \frac{\psi_{ij+2} - \psi_{ij}}{2\Delta x} + \\
 & + \frac{b_{i-1j} + |b_{i-1j}|}{2} \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-2j}}{2\Delta y} + \frac{b_{i+1j} - |b_{i+1j}|}{2} \frac{\psi_{i+2j} - \psi_{ij}}{2\Delta y} = f_{ij}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Далее предлагается одновременно решать 4 разностные задачи для каждого узла мелкой сетки с двойными шагами на сетке  $G^{2h}$  в одном итерационном процессе. Используется поточечный метод Гауса-Зейделя, который позволяет получить разностное решение  $\psi^{2h}$  с удвоенным шагом для всех точек исходной сетки  $G^h$  и тем самым снять проблему интерполяции.

Задача (1) решается на сетках  $G_1^{2h}, G_2^{2h}, G_3^{2h}, G_4^{2h}$  по схеме (3). Сетки с удвоенным шагом  $G^{2h}$  не пересекаются всюду кроме приграничных узлов, где они связаны из-за граничных условий. Так, например, в соотношении  $(\psi_{1j} + \psi_{0j})/2 = 0, \psi_{1j} \in G_3^{2h}, \psi_{0j} \in G_1^{2h}$ . При этом используется дополнительное граничное условие  $(\psi_{-1j} + \psi_{2j})/2 = 0, \psi_{-1j} \in G_3^{2h}, \psi_{2j} \in G_1^{2h}$ . Аналогичные соотношения имеют место и на других границах. В случае другой краевой задачи, например, нулевого потока через границу, в качестве дополнительных вычислительных граничных условий связывающих сетки может быть естественная аппроксимация нулевого разностного решения  $\psi^h$  и разностного решения  $\psi^{2h}$  задачи (1) по простой экстраполяционной формуле для равномерной сетки можно получить решение со вторым порядком точности  $o(\delta^2)$

$$\overline{\psi^h} = 2\psi^h - \psi^{2h}, \tag{4}$$

Рассмотрим результаты численных экспериментов. Прежде всего на рис. 2, а приведено разностное решение задачи (1), полученное на сетке  $G^h$  с тонким разрешением при  $N = 300, M = 300$  по симметричной центрально-разностной схеме по обеим координатам. Можно считать, что решение достаточно близко к точному, поскольку оно получено со вторым порядком точности на достаточно мелкой сетке. Далее будем называть его “точным”. На рис. 2 (а, б, в) приведены изолинии полученных решений  $\psi^{2h}, \psi^h, \overline{\psi^h}$  для  $N = 40$ . Видно, что с повышением порядка аппроксимации внутренний пограничный слой становится интенсивнее. Максимальные значения функции составили 159, 176, 196, соответственно. Разностное решение  $\psi(x, 2.5), \psi(x, 3.5)$ , полученное при  $N = 20$  показано на рис. 3. Таким образом, решение со вторым порядком точности  $\overline{\psi^h}$  значительно уточняет решения  $\psi^{2h}, \psi^h$ .

### 3. Задача адвективного переноса

Исследуем исключение схемной диффузии в нестационарной задаче на примере решения следующего модельного уравнения [5]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \phi = \phi(t, x, y). \tag{5}$$

Для уравнения (5) рассматривается задача Коши с начальным условием

$$\begin{cases} \phi(x, y)|_{t=0} = 100 \cos \gamma, & |\gamma| \leq \frac{\pi}{2} \\ \phi(x, y)|_{t=0} = 0, & |\gamma| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2R} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

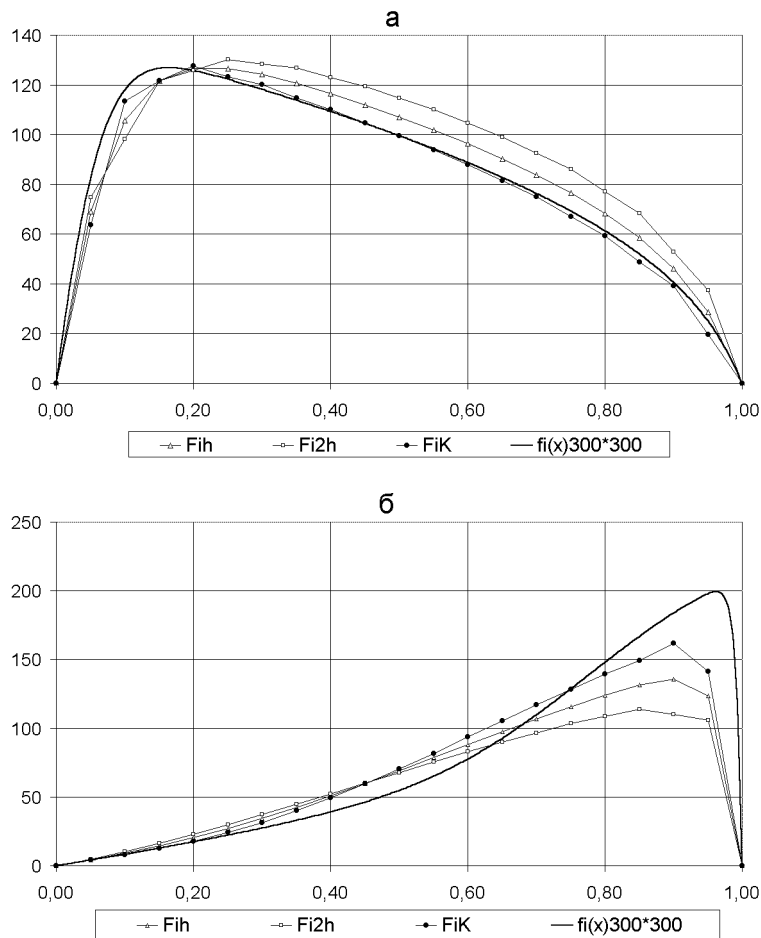


Рис. 3. Разностное решение задачи (1) при  $N = 20$ : а) для  $y = 2, 5$ , б) для  $y = 3, 5$ .

и условием поглощения на границе области. Здесь  $x_0, y_0$  — координаты центра импульса,  $R$  — радиус основания начального импульса. Задача (5)–(6) описывает вращение импульса с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  в квадрате  $L \times L$  с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Центр вращения помещен в центр квадрата.

Введем равномерную сетку с шагом  $\Delta x = \Delta y = L/M$ . Будем аппроксимировать дифференциальную задачу (5)–(6) в сеточной области  $G_h = \{(\Delta x(i-1), \Delta y(j-1)) : i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, M\}$ . Шаг по времени  $\Delta t = 120$ , полный оборот совершается за 208 шагов. Аппроксимируем уравнение (5) по  $x$  и  $y$  — неявной схемой направленных разностей

$$\frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n}{\Delta t} + u_{ij}^+ \frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{i-1j}^{n+1}}{\Delta x} + u_{ij}^- \frac{\phi_{i+1j}^{n+1} - \phi_{ij}^{n+1}}{\Delta x} + v_{ij}^+ \frac{\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ijj-1}^{n+1}}{\Delta y} + v_{ij}^- \frac{\phi_{ijj+1}^{n+1} - \phi_{ij}^{n+1}}{\Delta y} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия- поглощение импульса:  $\phi(1, j) = \phi(i, 1) = \phi(M, j) = \phi(i, M) = 0$ .

	Эксперимент	max $\phi$	min $\phi$	$\sum \phi_i^n / \sum \phi_i^0$	$\sum (\phi_i^2)^n / \sum (\phi_i^2)^0$
Run1	Сетка с шагом $2\Delta x$	5.26	0	0.60	0.03
	Сетка с шагом $\Delta x$	9.58	0	0.82	0.06
	Корректор	14.15	-1	0.99	0.12
Run2	Сетка с шагом $2\Delta x$	8.12	-0.01	0.74	0.05
	Сетка с шагом $\Delta x$	8.14	-0.01	0.76	0.05
	Корректор	8.16	-0.01	0.75	0.05
Run3	Сетка с шагом $2\Delta x$	33.37	-5.09	1.05	0.33
	Сетка с шагом $\Delta x$	33.96	-5.33	1.05	0.34
	Корректор	34.54	-5.61	1.05	0.35

В первом эксперименте Run1 сначала находятся решения на грубой и мелкой сетке через полный период

по времени (208 шагов), а затем один раз проведено уточнение по формуле (4). Первое решение — на сетке  $18 \times 18$  с шагом  $2\Delta x$ , второе — на сетке  $35 \times 35$  с шагом  $\Delta x$ , и третье решение со вторым порядком точности получено по экстраполяционной формуле (4) на сетке  $18 \times 18$ . Полученные результаты приведены в табл. 1. Схема направленных разностей имеет большую схемную вязкость, приводящую, как и в [6], к уменьшению максимума импульса за один период до 5–10% в зависимости от сетки. Уменьшение  $\sum \phi_i^n / \sum \phi_i^0$  до 60–82% объясняется использованием условий поглощения на границе. С помощью экстраполяции Ричардсона удаётся уточнить решение, но крайне незначительно.

Кроме того, как видно из рис. 4 (а, б, в), изолинии всех трех решений деформированы, вытянуты вперед по потоку, и центр масс смещен в переднюю часть области.

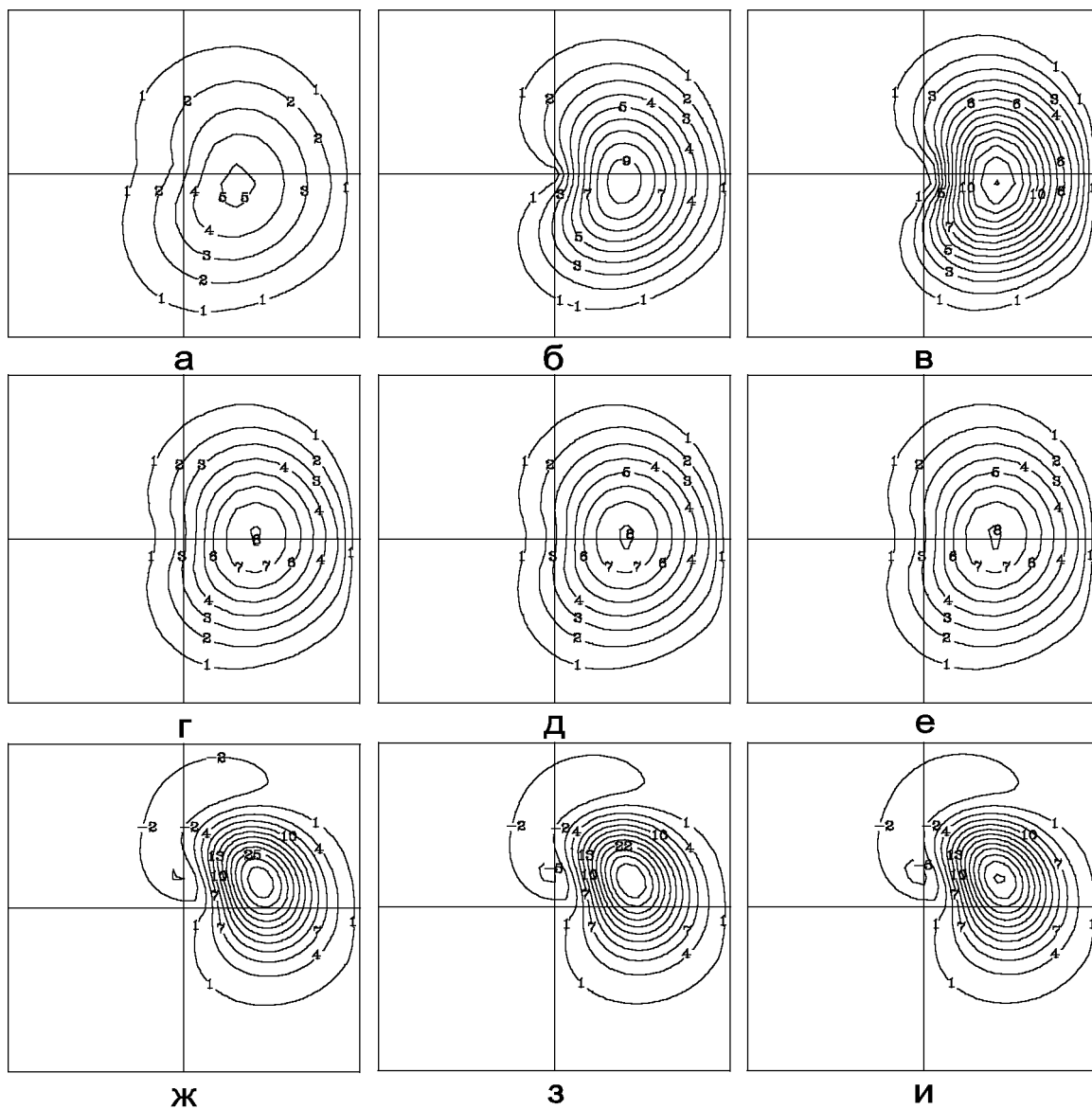


Рис. 4. Разностное решение задачи (5)–(6) через один период по времени — а), б), в) полученное в эксперименте Run1 с шагом  $2\Delta x, \Delta x$  и “корректор”, соответственно; г), д), е) то же для эксперимента Run2; ж), з), и) то же для эксперимента Run3.

Во втором эксперименте Run2 исключается не только схемная вязкость по пространству, но и по времени. Задача решается параллельно на двух сетках, описанных выше, но теперь экстраполяцию Ричардсона по формуле (4) делаем через один шаг по времени  $2\Delta t$  на сетке  $18 \times 18$  и через два шага по времени  $\Delta t$  для мелкой сетки. Полученное на сетке  $18 \times 18$  откорректированное решение используем как предыдущее приближение для обеих задач, при этом интерполируем его для сетки  $35 \times 35$ . Результаты Run2 также приводятся через один полный период по времени. Как видно из таблицы и рис. 4 (г, д, е) использование интерполяции приводит к ухудшению решения на мелкой сетке и сводит на нет все уточнения, в следствии

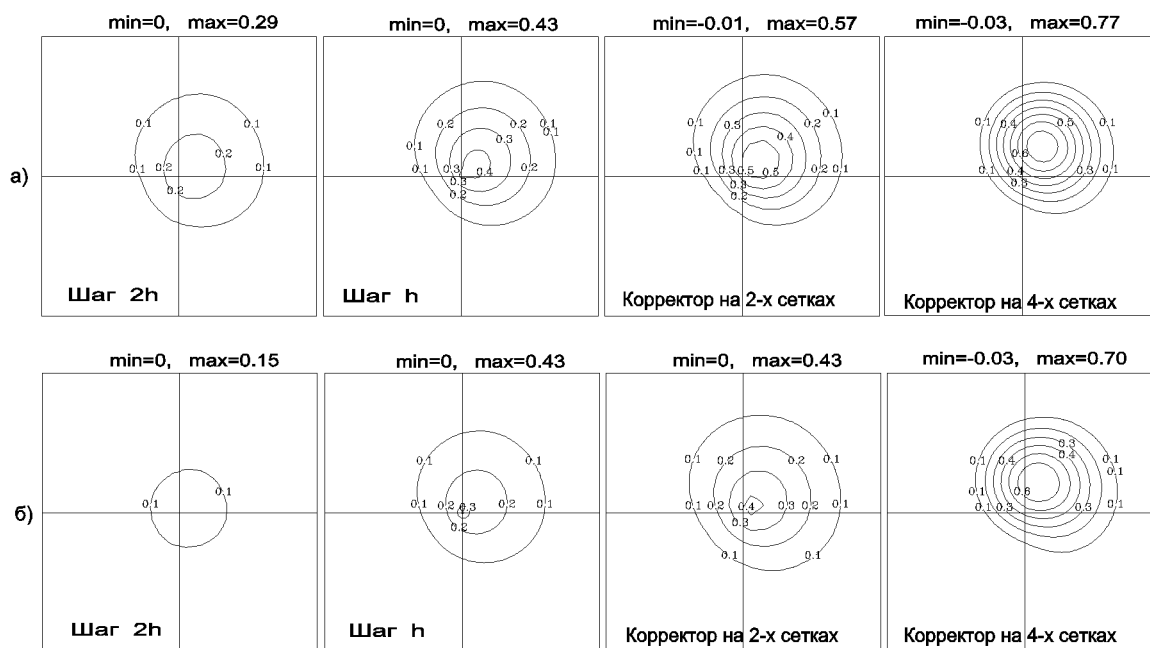


Рис. 5. Разностное решение задачи переноса конуса: а) через один период по времени, б) через два периода по времени.

чего применение экстраполяции Ричардсона не результативно.

В эксперименте Run3 проблема интерполяции решается с использованием четырех вложенных сеток, как описано во втором разделе. В остальном этот эксперимент повторяет Run2.

Все 4 сетки с двойными шагами связаны между собой за счет дополнительных вычислительных граничных условий. Решение с шагом  $2\Delta x$  получается для каждой точки мелкой сетки  $35 \times 35$ . Через один период по времени максимальный импульс составил 34%, лучше сохранилась и форма сигнала. Однако генерируются отрицательные значения функции, хотя и незначительные по величине. Также появилась фазовая ошибка, приводящая к опережению решения относительно аналитического примерно на 10 шагов по времени за один оборот.

Еще один эксперимент был проделан с другой формой сигнала — в виде конуса [7]. Был повторен эксперимент Run1 и Run3, результат представлен на рис. 5. Форма сигнала существенно повлияла на результат. Поскольку в случае конуса схемная вязкость из-за равенства нулю 2-ой производной всюду кроме острия и подошвы конуса отсутствует, то в целом, оба эксперимента оказались более эффективными по сравнению расчетами с сигналом в виде косинуса (6). Экстраполяция Ричардсона в Run1 через 1 оборот сохраняет 57% амплитуды точного сигнала, вместо 14% для косинуса, а использование 4-х вложенных сеток сохраняет 77% сигнала, а не 35% как ранее. Интересно отметить, что второй оборот уменьшает амплитуду сигнала при использовании 4-х сеток всего на 7%, тогда как использование одной вложенной сетки на 14%.

Приведенные результаты численных экспериментов свидетельствуют о перспективности применения предлагаемого метода для решения адвективно-диффузионных уравнений.

## Список литературы

- [1] WEAVER A. J., SARACHIK E. S. On the importance of the vertical resolution in certain ocean general circulation models // J. of Physical Oceanography, 1990. Vol. 20. P. 600–609.
- [2] КОЧЕРГИН В. П., ЩЕРБАКОВ А. В. Исследование разностных схем для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных // Численные модели океанических циркуляций. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1972. С. 7–24.
- [3] ЩЕРБАКОВ А. В. Эксперименты с численной моделью климата Мирового океана. Новосибирск, 1989. Препринт 859, ВЦ СО АН СССР, 30 с.

- 
- [4] ЩЕРБАКОВ А. В., СИНЯГОВСКАЯ В. В. Экстраполяция Ричардсона на неравномерной сетке в задаче адвективно-диффузионного переноса // Тр. ВЦ СО РАН. Сер. Численное моделирование в задачах атмосферы, океана и окружающей среды, Вып. 1, Новосибирск, 1993. С. 47–59.
- [5] CROWLEY W. P. Numerical advection experiments. Mon. Weather Rev., 1968, Vol. 96, No. 1.
- [6] ИЛЬИН В. О. Анализ конечноразностных схем численного решения уравнения адвекции // Метеорология и гидрология, 1983. № 6.
- [7] ШОКИН Ю. И., ЯНЕНКО Н. Н. Метод дифференциального приближения. Новосибирск. Изд. Наука, Сибирское отд-ние, 1985. 364 с.