ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В. П. Ильин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: ilin@comcen.nsk.su

Рассматриваются проблемы построения эффективных вычислительных алгоритмов и технологий для решения больших задач математической физики, описываемых многомерными краевыми задачами со сложной конфигурацией границы расчетной области для систем функциональных уравнений: дифференциальных, и/или интегральных, вариационных, включающих в том числе оптимизационные постановки с минимизацией целевых функционалов, линейными и нелинейными ограничениями. Современные экономичные методы (многосеточные, декомпозиции областей, расщепления и т. д.) для решения таких задач обладают достаточно сложной логической структурой и требуют для автоматизации своих реализаций специальных объектно- ориентированных программных средст. В работе описываются основные требования и принципы построения систем геометрического и функционального моделирования на основе базовых вычислительных инструментариев, позволяющих оперативно генерировать пакетные конфигурации для конкретных приложений.

Введение

На семинарах Н. Н. Яненко в качестве одного из главных неформализованных понятий широко использовался термин “большие задачи”, неявно подразумевавший требование значительных вычислительных ресурсов. Традиционно это связывается с количеством арифметических операций и обьемом оперативной памяти, между которыми исторически поддерживается равновесие по следующей формуле, отражающей соотношение между ключевыми характеристиками компьютеров разных эпох:

$$[\text{количество мегафлоп}]\approx[\text{число мегабайтов}].$$

Для современного массового профессионального компьютера среднего уровня это означает примерно 100 мегафлоп и 100 мегабайт.

Н. Н. Яненко поддерживал методологический принцип о существовании инварианта в определении “больших задач”: это задача, которая, независимо от номера текущего года и поколения компьютера, решается “долго”. Это правило можно формулировать как

$$[\text{большая задача}]\sim[\text{время счета составляет несколько часов}].$$

Можно ввести также понятия малых, средних и сверхбольших задач, для которых времена счета составляют соответственно минуты, десятки минут и десятки (или сотни) часов.

Требования к вычислительным ресурсам определяются главным образом числом независимых переменных (размерность задачи), количеством неизвестных функций (или решаемых дифференциальных уравнений), факторами нелинейности и/или нестационарности, а также необходимой точности, обуславливающей число узлов сетки в используемых методах конечных разностей, конечных элементов или конечных объемов (МКР, МКЭ, МКО).

Современный уровень развития информационнных технологий актуализирует не только вычислительную сложность задачи, но и ее интеллектуальную сложность. Последняя определяется следующими основными факторами: геометрия границы расчетной области (наличие многосвязности, криволинейных поверхностей, углов и т. д), особенности решаемых систем дифференциальных и/или интегральных уравнений (в том числе их различные типы в разных подобластях), свойства применяемых численных алгоритмов, включая такие логически сложные, как адаптивные многосеточные методы, декомпозиция

*Работа поддержана грантами РФФИ № 99–07–90422 и № 01–07–90367.

областей, расщепление по физическим процессам или направлениям и т. д., а также оптимизационные постановки.

Необходимым условием математического моделирования является визуализация результатов расчета, для которой развитые средства имеются в CAD-системах и многочисленных графических приложениях, см. например [1]. Высокий уровень автоматизации построения алгоритмов достигнут в таких математических программных системах,как Matlab, Maple, Mathematika, Mathcad (см. обзор в [2]), однако они ориентированы главным образом на решение относительно небольших задач.

Интеллектуализация же вычислительных методов и технологий для решения больших задач математической физики ставит свои проблемы, связанные с манипулированием сложными объектами и управлением многоуровневыми вычислительными экспериментами. В первую очередь они связаны с созданием средств геометрического и функционального моделирования, которые должны обеспечить, с одной стороны, внешний (пользовательский) интерфейс, а с другой–внутреннюю связь с вычислительными программными модулями. Разработка таких инструментов требует формализованного описания разнообразных математических объектов и разработки специализированных геометрических и функциональных структур данных (ГСД и ФСД). Реализация соответствующих систем моделирования наиболее естественна на основе объектно-ориентированных средств программирования.

В п. 1 мы проводим обсуждение характерных понятий и структур данных по математическим постановкам задач и алгоритмам их решения, см также [3–5]. В п. 2 анализируются основные принципы построения и требования к системам геометрического и функционального моделирования.

1. Математические модели и обьекты

Описание математической постановки задачи можно разбить на три основные части: геометрия расчетной области, решаемые функциональные уравнения с краевыми и/или начальными условиями и формулировка применяемых алгоритмов, включая методы оптимизации параметров в исходных данных. Нашей целью в данном случае является формальное определение основных математических объектов, их спецификаций, а также возможных операций над ними. В силу этого мы на содержательном уровне приводим главные компоненты геометрической и функциональной структур данных, не конкретизируя способы их программного представления.

1.1. Геометрические объекты и структуры данных

Задание геометрии расчетной области заключается в однозначном описании ее составляющих объектов (возможно, с использованием локальных систем координат, задаваемых с помощью указания своего типа, положения начала координат и углов наклона осей относительно "глобальной" системы координат), а также их взаимосвязей. В трехмерном случае к элементарным, или базовым, объектам относятся:

точки — граничные *вершины* или *вспомогательные точки*, — определяемые своими координатами; точка может быть определена также как пересечение двух линий или трех поверхностей, или же задана совокупностью уравнений (и возможно, неравенств);

линии — прямые или кривые различных порядков, замкнутые или разомкнутые, плоские или пространственные; каждая линия определяется явно своим *типом*, т. е. видом описывающего ее уравнения (возможно, в локальной системе координат) и значениями коэффициентов; в трехмерном случае линия может быть определена неявно как общее множество точек двух пересекающихся поверхностей и описана системой соответствующих двух уравнений (для определенности — с возможными дополнительными условиями);

отрезки — прямолинейные или криволинейные — определяются номером (или идентификатором) своей линии, а также указателями (номерами) двух точек, задаваемых как *начало* и *конец* отрезка;

ломаная, или *ветвь*, — это односвязная совокупность заданной последовательности прямолинейных или криволинейных отрезков; замкнутая ломаная называется *контуром*;

поверхности определяются явным образом своими типами и коэффициентами уравнений (возможно, в локальных системах координат); допускается также неявное описание поверхностей с помощью точек или линий;

поверхностные сегменты — объекты, определяемые идентификаторами (номерами) своей поверхности, ограничительных линий и вершин;

набор поверхностных сегментов — это заданная односвязная или многосвязная совокупность "простых" поверхностных сегментов;

подобласть Ω_k — это открытая область, ограниченная своей *границей* Γ_k, вместе с которой она образует *замыкание подобласти* $\bar{\Omega}_k = \Omega_k \cup \Gamma_k$;

составная подобласть — это заданная односвязная или многосвязная совокупность подобластей.

Расчетная область есть замыкание "самой большой" составной подобласти (в простейшем случае расчетная область состоит из одной подобласти).

Отметим еще такое понятие, как *базовые координаты* по каждой из осей глобальной системы координат, указаниями на номера которых задаются координаты всех точек, участвующих в построении расчетной области. И наконец, для глобальной и всех локальных систем координат указываются их типы: декартовая, цилиндрическая, сферическая или специальные — в последнем случае с заданием формул для определения независимых переменных.

Геометрическая структура данных должна содержать полную информацию для однозначного описания всех базовых объектов и идентификации расчетной области вместе со всеми подобластями.

Подчеркнем, что в целях гибкого геометрического моделирования, включающего операции редактирования и модификаций, допускается избыточность (но согласованная!) информации со средствами перекрестного определения базовых объектов через другие объекты различной размерности, например, линий — через точки или поверхности, и наоборот. Это означает, что ГСД должна поддерживать такие геометрические операции, как, например, необходимые модификации объектов, связанных сдвигом одного граничного отрезка. В общем случае различные операци геометрических модификаций должны определять свои активные изменяемые параметры и пассивные параметры, а также характер зависимостей между ними.

Кроме базовых объектов, ГСД может включать *составные объекты* или *фигуры*, например, параллелепипед, определяемый своими размерами и положением в пространстве.

1.2. Функциональные объекты и структуры данных

Описание математической постановки задачи, при уже заданной геометрии расчетной области, состоит из следующих основных компонент:

описание решаемых *функциональных уравнений* или других соотношений; в качестве содержательного примера можно привести систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$D\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla A \nabla \bar{u} + B \nabla \bar{u} + C\bar{u} = \bar{f}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где $\bar{u} = (u_1, ..., u_n)$, $\bar{f} = (f_1, ..., f_n)$ суть вектор-функции, ∇ есть оператор градиента в декартовой или какой-либо другой системе координат, а A, B, C, D — некоторые матрицы порядка n, элементы которых — это или постоянные, или функции независимых переменных, или искомых решений;

граничные условия для искомых решений; это может быть смешанная краевая задача, когда граница расчетной области Γ состоит из частей Γ_D, Γ_N, на которых задаются условия разных типов:

$$\bar{u} = \bar{g}_D, \quad x \in \Gamma_D; \quad D_N \bar{u} + A_N \nabla_n \bar{u} = \bar{g}_N, \quad x \in \Gamma_N, \tag{2}$$

где D_N и A_N — матрицы (в общем случае прямоугольные, т. к. на разных участках границы может быть задано разное число условий), а $\bar{g}_D$, $\bar{g}_N$ — вектор-функции, элементы которых или известны, или зависят от искомых решений ;

начальные данные (для нестационарных задач, т. е. $D \neq 0$) в рассматриваемом примере (1) выглядят просто:

$$\bar{u}(x, t = 0) = \bar{u}^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $\bar{u}(x)$ — заданная вектор-функция; при этом решение ищется на ограниченном отрезке времени $0 < t \leq T < \infty$.

Такая примерная *начально-краевая задача* (1) – (3) описывает *прямую* постановку, которая переходит в *обратную*, или *оптимизационную*, если рассматриваемые данные (и решение) зависят от *варьируемых параметров*

$$\bar{p} = (p_1, ..., p_m),$$

для которых требуется найти такие значения, при дополнительных линейных или нелинейных ограничениях

$$p_k^i \leq p_k \leq p_k^s, \quad k = 1, ..., m_1,$$

$$\Phi_l(\bar{u}(x, t, \bar{p})) \leq r_l, \quad l = 1, ..., m_2, \tag{4}$$

где $m_1, m_2, p_k^i, p_k^s, r_l$ — заданные числа, а Φ_l — некоторые *ограничительные функционалы*, которые минимизируют *целевой функционал*

$$\Phi_0(\bar{u}(x,t,\bar{p}_0)) = \min_{\bar{p}} \Phi_0(\bar{u}(x,t,\bar{p})). \tag{5}$$

Важно подчеркнуть, что функциональные данные имеют прямую связь с геометрическими. Коэффициенты и правая часть уравнения (1) могут иметь различные представления и свойства в разных подобластях расчетной области. Части границы Γ_D и Γ_N могут иметь различные сегменты, на которых заданы разные конкретные условия (2).

Среди основных компонент ФСД можно назвать следующие.

а. Общий тип решаемой задачи, например: диффузия, магнитостатика, тепло-массоперенос, упругость и т. д., — который определяет состав членов решаемых уравнений и характер участвующих коэффициентов.

б. Размерность расчетной области и используемая система координат.

в. Тип краевой задачи (например, задача Дирихле, Неймана, 3-я краевая или смешанная, линейные или нелинейные граничные условия).

г. Представление коэффициентов уравнений (каких — в зависимости от содержания п.а), вместе с их или значениями, или описывающими формулами, или со ссылками на вычисляющие их процедуры; данные описания при необходимости формулируются отдельно для каждой из подобластей с соответствующими ссылками;

д. Аналогичные представления для коэффициентов краевых условий (2), с привязкой к конкретным участкам границ Γ_D и Γ_N;

е. Оптимизационные данные: описание варьируемых параметров p_k, т. е. ссылки на соответствующие переменные из предыдущих разделов ФСД (в принципе, меняться может любая величина, например, координата какой-либо точки границы, коэфициент решаемого уравнения или краевого условия), а также их возможные начальные значения p_k^0 и допустимые границы изменений p_k^i, p_k^s, $k = 1, ..., m$; кроме того, должны быть даны ссылки на процедуры, вычисляющие целевой и ограничительные функционалы.

1.3. Сеточные объекты и структуры данных

Чтобы представить многообразие рассматриваемых сеток, мы перечислим ключевые слова, характеризующие их допустимые виды: иерархические, вложенные, составные, согласованные и несогласованные, регулярные и нерегулярные, локально-модифицированные, равномерные и неравномерные, треугольные и четырехугольные (в двумерном случае), прямолинейные и криволинейные.

Формально говоря, сетка (в трехмерном случае) представляет собой взаимосвязанную совокупность своих объектов: *конечных объемов*, или *элементов*, их *граней*, *ребер* и *узлов*. Односвязное объединение сеточных элементов Ω^e будем называть *сеточной областью*: $\Omega^h = \bigcup\limits_l \Omega_l^e$, — а ее замыкание обозначаем через $\bar{\Omega}^h = \Omega^h \bigcup \Gamma^h$, где граница Γ^h есть множество (не обязательно односвязное) граничных граней. *Сеточная расчетная область* $\bar{\Omega}^h$ включает в себя расчетную область ($\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}^h$) и может состоять из *сеточных подобластей* ($\Omega^h = \bigcup\limits_k \Omega_k^h$).

Важным моментом в дискретизации расчетной области является соотношение границ геометрических и сеточных Γ и Γ^h, которые в идеальном случае должны быть совпадающими, что несложно обеспечить только в простейших случаях. Если граница Γ криволинейная, то будем считать, что граничные узлы из Γ^h лежат на Γ, а граничные ребра и грани или совпадают, или аппроксимируют соответствующие участки исходной границы.

Сеточная расчетная область $\bar{\Omega}^h$ может быть *простой* и *составной*, последний случай относится к наличию более чем одной сеточной подобласти Ω_k^h, $k = 1, ..., K_h > 1$.

Сеточную область, или сетку $\bar{\Omega}_k^h$, будем называть *структурированной*, если она образована с помощью семейств однотипных координатных линий, имеет топологически подобные конечные объемы и простые формулы для определения инцидентности (или нумерации, или же адресации) смежных элементов, ребер и узлов. В противном случае сетку называем *неструктурированной*, или *хаотической*. Характерная для нее информационная сложность объясняется тем, что взаимосвязи между сеточными объектами описываются только полным перечислением всех необходимых адресов и ссылок.

Под *иерархическими вложенными* сетками понимаются такие совокупности сгущающихся сеток, в которых все узлы редких сеток остаются узлами более густых сеток.

Сеточная структура данных (ССД) должна быть, во-первых, полна, т.е. поддерживать однозначное определение всех сеточных объектов и их взаимосвязей, и во-вторых, экономичной, в смысле обеспечения быстрого ее анализа при реализации этапов аппроксимации задачи.

Для составной сетки ССД содержит информацию о *макросетке*, т.е. о совокупности сеточных подобластей Ω_k^h (которые можно считать макроэлементами), включая соотношения инцидентности ее ребер, граней и вершин. Каждое из " макроребер" (как и "макрогрань" в трехмерном случае) представляет собой подмножество узлов и ребер из Ω^h.

Для простой сеточной расчетной области, как и для каждой Ω_k^h при $K_h > 1$, ССД содержит информацию "микроуровня", т.е. об "обычных" сеточных объектах. Эти данные в общем случае делятся на *по-узловые*, *по-реберные*, *по-граневые* и *по-элементные*. Так, например, для каждого элемента (конечного объема) должны быть определены номер его расчетной подобласти, а также номера всех граней и узлов. Соответственно для каждой сеточной грани должен быть задан или номер граничного сегмента, или признак ее "внутренности", т.е. принадлежности Γ_k^i.

Таким образом осуществляется связь ССД с ГСД и ФСД, что позволяет при построении локальных матриц баланса в МКО (или матриц жесткости в МКЭ) в по-элементной технологии определять типы решаемых уравнений, краевых условий, а также значения их коэффициентов, см. [6, 8]. Кроме того, наличие макро- и микро- уровней информационных связей помогает, по выполнению этапа аппроксимации, формировать гибкие алгебраические структуры данных, позволяющие реализовывать, например, эффективные методы декомпозиции областей, различные по-точечные и блочные алгоритмы решения систем алгебраических сеточных уравнений.

Естественно, при использовании многосеточных методов на иерархических сетках рассмотренные информационные связи формируются и используются во время аппроксимационных процедур на каждой из подсеток.

1.4. Алгебраические задачи, методы и структуры данных

Если этап аппроксимации исходной начально-краевой задачи пройден и исходная задача алгебраизирована, то далее главной проблемой является выполнение векторно-матричных операций. При всем их разнообразии здесь формально можно выделить достаточно ограниченный класс задач, введя обозначения f_h, u_h, A_h для известной и неизвестной *сеточных функций*, определенных в узлах сетки, а также для *матрицы сеточного оператора*, определяющего на дискретном уровне все исходные функциональные преобразования и соотношения. Подчеркнем тот принципиальный момент, что матрица A_h имеет очень высокий порядок и является сильно *разреженной*, а ее ключевой характеристикой является *портрет матрицы*, определяющий расположение ненулевых элементов. Сеточным эквивалентом последнего понятия является *сеточный шаблон*, указывающий для каждого узла его связи с соседними узлами, а другой близкий по смыслу алгебраический термин — это *граф матрицы*.

Итак, основные алгебраические операции заключаются в следующем:

вычисление рекуррентных соотношений вида

$$u_h^n = A_h u_h^{n-1} + f_h, \quad n = 1, 2, ..., \tag{6}$$

решение систем уравнений

$$A_h u_h = f_h, \tag{7}$$

нахождение собственных чисел λ_p и соответствующих собственных векторов z_h^p

$$A_h z_h^p = \lambda_p z_h^p, \quad p = 1, 2, .. \tag{8}$$

Решение задач (7), (8) разбивается, в свою очередь, на подэтапы, связанные с умножением векторов на промежуточные матрицы или решением вспомогательных подсистем с треугольными матрицами.

В соотношениях (6) – (8) элементы матрицы A_h и вектора f_h могут зависеть от искомого решения u_h (нелинейные задачи), и тогда алгоритмы включают многократное решение соответствующих линейных задач с организацией интерационных процессов "по нелинейности".

В динамических задачах данные алгебраические операции могут выполняться на каждом шаге по времени, а сама временная переменная t при этом может рассматриваться формально как параметр $(A_h = A_n(t), \quad f_h = f_n(t))$, меняемый дискретно от своего начального до конечного значений.

В оптимизационных задачах, кроме того, алгебраические объекты зависят от варьируемых параметров исходных данных в ГСД и ФСД, что приводит к дополнительным повторным реализациям соотношений (6) – (8) в процессе минимизации целевого функционала.

В различных явных или неявных сеточных алгоритмах, см., например [10], построение адаптивных схем связано с выбором той или иной упорядоченности узлов, что определяет конкретную структуру матрицы A_h и организацию последовательности вычислений. Например, в неявных методах переменных направлений для прямоугольной сетки на различных стадиях необходимо решать одномерные задачи вдоль разных координатных линий. Аналогичные подходы широко применяются в методах расщепления по физическим процессам, когда полная матрица A_h разбивается на сумму матриц более простой структуры для выделения более простых алгебраических подзадач. Отметим также, что различные прямые и итерационные методы решения задач (7), (8) связаны формально с разложением A_h в произведение легко обратимых матричных множителей. Более сложные ситуации возникают в методах декомпозиции области, основанных на последовательности решений выделяемых независимых подсистем в подобластях, при различных реализациях информационных обменов между ними и возможных специальных операциях на разделительных границах.

Для технологической поддержки такого типа комплексных методов требуются развитые средства представления матриц и векторов в блочном, аддитивном и мультипликативном видах, с возможностями описания и реализаций различных вычислительных стратегий. Например, векторы u^h, f^h могут быть разбиты на подвекторы, соответствующие внутренним узлам сеточных подобластей Ω_k^h и внутренних границ $\Gamma_{k,k'}^h$. Если при этом определены как информационные объекты соответствующие матричные блоки$A_{k,l}^h$ с простыми средствами доступа к своим элементам, то это позволяет экономично реализовать нужные подзадачи и проблему в целом.

Подчеркнем, что для обеспечения выбора подходящего или быстрого подключения нового алгебраического метода АСД должна включать разнообразные представления своих объектов и средства возможного их перевода из одной формы в другую. Многочисленные универсальные и специализированные матричные форматы достаточно хорошо описаны, например, в [9].

2. Требования к системам геометрического и функционального моделирования

Численное решение больших задач математической физики можно представить состоящим из последовательного выполнения основных этапов, которые формально заключаются в преобразовании одних структур данных в другие:

а. дискретизация расчетной области, т. е. построение сетки (ГСД→ССД);

б. аппроксимация исходных функциональных уравнений и формирование сеточных алгебраических уравнений или соотношений(преобразование ГСД+ФСД+ССД→АСД);

в. решение полученных алгебраических задач, с возможным обращением к двум предыдущим пунктам(формула АСД→результирующая структура данных РСД);

г. при необходимости — решение оптимизационных поставок с многократными обращениями ко всем или нескольким предыдущим пунктам (получение на основе всей предыдущей информации оптимизационной структуры данных ОСД). Реализация любого из этапов может сопровождаться визуализацией промежуточных или итоговых результатов, для поддержки которой формируется графическая структура данных (ГрСД).

Условно можно считать, что указанные этапы реализуются вычислительными модулями с именами соответственно GRID, APPROX,SOLVE,OPTIM, включающим в себя некоторый базовый инструментальный уровень. Такое вычислительное ядро содержит универсальные алгоритмы для наиболее распространенных сеток, сеточных элементов и алгебраических систем. Это ядро должно быть практически несвязанным с особенностями конкретной математической задачи, но обладать возможностями реконфигурации и наращивания проблемно-ориентированными программными компонентами для практических областей знаний, являясь таким образом основой для вычислительного наполнения "заказываемых" пакетов прикладных программ (ППП).

Операции с математическими объектами геометрического и функционального характера обеспечиваются соответствующей системой геометрического и функционального моделирования (СГФМ). Назначение этой системы — реализация гибкого манипулирования интеллектуальными данными и операциями, а также поддержка посреднической роли для двустороннего интерфейса: внешнего графического интерфейса с пользователем и внутреннего — с вычислительным наполнением ППП. В терминах обработки информации — это взаимообратные преобразования ГрСД и других указанных структур данных. Наиболее естественна реализация СГФМ средствами объектно-ориентированного программирования, позволяющими определением абстрактных типов данных со свойствами наследования, полиморфизма и рекурсивности формировать легко развиваемые библиотеки классов. На такой базе эффективно создается инструментальное ядро,позволяющее сочетать эффективность и универсальность программного продукта, развиваемость и адаптируемость к разным приложениям, а также возможность его переиспользования в различных операционных обстановках.

Список литературы

[1] Голубева Л. А., Ильин В. П. Использование САД-приложений для решения задач маторизации // Препринт № 1137 ИВМ и МГ СО РАН. Новосибирск, 1998.

[2] Гололобова С. П. Обзор математических программных систем // Тр. ИВМ и МГ СО РАН, сер. Выч. мат., Новосибирск, вып.6. 1998. С. 20–26.

[3] Ильин В. П. Вычислительно-информационные технологии математического ммоделирования // Автометрия. Новосибирск, 2000. № 1. С. 3–16.

[4] Гурьева Я. Л., Ильин В. П., Ларин М. Р. Внутренняя структура данных в двумерных краевых задачах //Припринт № 1090, ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск, 1997.

[5] Юдин А. Н. Теоретико-множественное описание геометрии и дискретизация трехмерной области с неоднородными средами // Тр. ВЦ СО РАН, сер.: Вычислительная математика. Новосибирск, 1996. № 5. С. 128–139.

[6] Kozlovsky G. Solving partial differential equations using recursive grids // Appl. Num. Math. 1994. Vol. 14. P. 165–181.

[7] Gurieva Y. L., Il'in V. P. On the finite volume technology for mixed boundary value problems. In: Advanced Mathematics, Computations and Applications: Proc. of the International Conf. AMCA-95, Novosibirsk, Russia, 20-24 June, 1995, Novosibirsk, NCC Publisher, 1995. P. 550–655.

[8] Babuska I., Szabo B. Finite element analysis. N. Y.: John Wiley & Sons Inc., 1991.

[9] Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.

[10] Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Изд. ИМ СОРАН, Новосибирск. 2000.