

АЛГОРИТМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

В. М. КОВЕНЯ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: kovenya@ict.nsc.ru

Изложена методология построения схем для решения многомерных задач аэрогидродинамики в приближении уравнений Эйлера сжимаемого газа и несжимаемой жидкости на основе конечно-объемной аппроксимации. Построены экономичные классы конечно-объемных схем с использованием различных форм расщепления и изучены их свойства.

Введение

Аппроксимация дифференциальных уравнений Эйлера или Навье — Стокса разностными схемами широко используется при решении различных классов задач аэро и гидродинамики (см., например, [1–8]). Однако, для ряда задач исходные уравнения удобнее выбрать в интегральной форме и аппроксимировать их на расчетной сетке, состоящей из ячеек различной формы, наиболее удобных при решении конкретного класса задач. Такой подход, носящий название конечных объемов или метода контрольного объема (МКО), рассматривался, начиная с 60-х годов при решении двумерных задач (см., например, [1, 2, 7, 8]). Аппроксимация исходных уравнений в интегральной форме на основе МКО приводит к системе линейных или нелинейных алгебраических уравнений большой размерности, как и при аппроксимации дифференциальных уравнений. Решение этих систем алгебраических уравнений представляет самостоятельную проблему и находится, как правило, на основе алгоритмов расщепления и приближенной факторизации. В настоящей работе идеология расщепления, развитая в работах [5, 9] применена для построения экономичных алгоритмов МКО.

1. Алгоритмы МКО для уравнений газовой динамики

Представим уравнения газовой динамики в виде интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии для произвольного фиксированного объема Ω с границей $d\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{W} ds = 0, \quad (1)$$

где

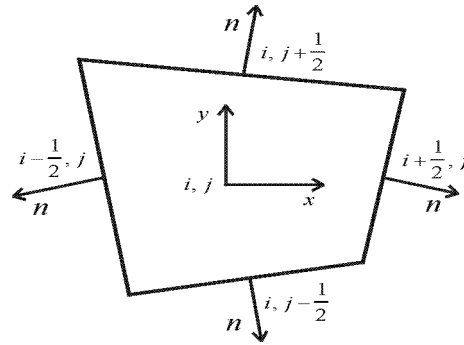
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho v_1 \mathbf{v} + p \mathbf{e}_1 \\ \rho v_2 \mathbf{v} + p \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}(E + p) \end{pmatrix}, \quad E = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right), \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2,$$

$ds = nds$ — элемент поверхности, умноженный на единичную внешнюю нормаль n к ней, v_m — составляющие вектора скорости \mathbf{v} в декартовых координатах x_m ($m = 1, 2$), $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — базис декартовой системы координат. Введем в рассмотрение четырехугольную ячейку.

Значения сеточных функций будем определять в центре ячейки i, j , а потоки на ее границе — в узлах $i \pm 1/2, j$ и $i, j \pm 1/2$ соответственно. Объем ячейки Ω обозначим через V , а площадь грани через $S_{m \pm 1/2}$. Введем среднее значение сеточных функций \mathbf{U} по объему

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{ij} = \frac{1}{V} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{U} d\Omega, \quad (2)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 99-01-00619 и № 99-07-90418.
© В. М. Ковеня, 2001.



а значение контурного интеграла в (1) аппроксимируем оператором \mathbf{R} по формуле

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{W} ds \approx \mathbf{R} = (S\mathbf{W})_{i+1/2} - (S\mathbf{W})_{i-1/2} + (S\mathbf{W})_{j+1/2} - (S\mathbf{W})_{j-1/2}. \tag{3}$$

С учетом аппроксимаций (2), (3) рассмотрим разностную схему с весами

$$V \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \alpha \mathbf{R}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{R}^n = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем, где это возможно, индексы i, j опущены. Схема (4) аппроксимирует исходные уравнения с порядком $O(\tau^m + h^2)$, где $m = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $m = 1$ при $\alpha \neq 0.5$, $h = \max(h_m)$, $h_m = V/S_m$.

Линеаризуем векторы \mathbf{U}^{n+1} и \mathbf{W}^{n+1} относительно вектора искомых функций \mathbf{f} :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + A^n \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2), \quad \mathbf{W}^{n+1} = (\mathbf{W})^n + \bar{B}^n \Delta \mathbf{f}^n + O(\tau^2), \tag{5}$$

где $A = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{f}}$, $\bar{B} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{f}}$, $\Delta \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$. С учетом (5) разностная схема (4) может быть преобразована к виду

$$(VA^n + \tau\alpha M^n) \Delta \mathbf{f}^n = -\tau \mathbf{R}^n. \tag{6}$$

Она линейна и аппроксимирует исходные уравнения (1) с тем же порядком, что и исходная схема (4). Здесь $M^n = (S\bar{B}^n)_{i+1/2} - (S\bar{B}^n)_{i-1/2} + (S\bar{B}^n)_{j+1/2} - (S\bar{B}^n)_{j-1/2}$. В силу симметричной аппроксимации контурного интеграла (3) разностная схема (6) немонотонна. Для получения монотонной схемы заменим симметричную аппроксимацию на несимметричную противотоктовую аппроксимацию первого порядка. Пусть $\varphi = \Delta \mathbf{f}^n$. Тогда очевидно справедливо следующее приближенное равенство

$$\begin{aligned} M^n \varphi &= (S\bar{B}^n \varphi)_{i+\frac{1}{2}} - (S\bar{B}^n \varphi)_{i-\frac{1}{2}} + (S\bar{B}^n \varphi)_{j+\frac{1}{2}} - (S\bar{B}^n \varphi)_{j-\frac{1}{2}} \approx \\ &\approx \bar{B}_1^n [(S\varphi)_{i+\frac{1}{2}} - (S\varphi)_{i-\frac{1}{2}}] + \bar{B}_2^n [(S\varphi)_{j+\frac{1}{2}} - (S\varphi)_{j-\frac{1}{2}}] \approx (\bar{B}_1^n \Delta_1 + \bar{B}_2^n \Delta_2) \varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\bar{B}_m \Delta_m = \bar{B}_m \begin{cases} S_{j_m-\frac{1}{2}} \Delta_{-m}, & \text{если } (v_n)_{j_m} \geq 0, \\ S_{j_m+\frac{1}{2}} \Delta_{+m}, & \text{если } (v_n)_{j_m} < 0, \end{cases} \quad m = 1, 2,$$

а $j_1 = i$, $j_2 = j$. Матрицы \bar{B}_1 и \bar{B}_2 взяты в целых узлах ячейки как среднее значение по граням, т.е. $\bar{B}_m = (\bar{B}_{j_m+\frac{1}{2}} + \bar{B}_{j_m-\frac{1}{2}})/2$, а разностные операторы Δ_{\pm} определены по формуле $\Delta_{\mp j_m} \varphi_{j_m} = \pm(\varphi_{j_m} - \varphi_{j_m \mp 1})$. С учетом (7) стабилизирующий оператор (6) может быть представим в виде

$$VA^n + \tau\alpha M \approx VA^n + \tau\alpha (\bar{B}_1^n \Delta_1 + \bar{B}_2^n \Delta_2) = VA^n \left[I + \tau\alpha \sum_{m=1}^2 B_m^n \Delta_m \right], \quad B_m = \frac{1}{V} (A^{-1})^n \bar{B}_m.$$

Тогда разностная схема

$$\left[I + \tau\alpha \sum_{m=1}^2 B_m^n \Delta_m \right] \Delta \mathbf{f}^n = -\frac{\tau}{V} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n \tag{8}$$

аппроксимирует исходные уравнения (1) с порядком $O(\tau^m + h^2)$ и линейна. Ее решение может быть получено методом матричной прогонки.

Приближенно факторизуя оператор $I + \tau\alpha \sum_{m=1}^2 B_m \Delta_m$, получим разностную схему

$$\prod_{m=1}^2 (I + \tau\alpha B_m^n \Delta_m) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\frac{1}{V} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n \quad (9)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{1}{V} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n, \quad (I + \tau\alpha B_1^n \Delta_1) \xi^{n+1/2} = \xi^n, \\ (I + \tau\alpha B_2^n \Delta_2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}, \end{aligned}$$

аппроксимирующую исходные уравнения (1) с порядком $O(\tau^m + \tau h + h^2)$. Разностная схема (9) реализуется на дробных шагах векторными прогонами.

1.1. Алгоритм расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям

Для получения экономичных разностных схем в работе [5] было введено расщепление исходных операторов по физическим процессам, каждый из которых описывал элементарный физический процесс. В [9] были предложены оптимальные формы расщепления, при которых влияние расщепления было минимальным, т.е. дополнительные члены появлялись лишь в уравнении энергии. Подобные алгоритмы могут быть построены и при аппроксимации уравнений в интегральной форме. Следуя [9], введем расщепление операторов B_m в виде:

$$\begin{aligned} B_m \Delta_m &= \sum_{j=1}^2 B_m^j \Delta_m = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_m^1 \Delta_{\pm m} \\ 0 & 0 & 0 & r_m^2 \Delta_{\pm m} \\ 0 & l_m^1 \Delta_{\mp m} & l_m^2 \Delta_{\mp m} & t_m \Delta_{\mp m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_m \Delta_{\mp m} & q_m^1 \Delta_{\mp m} & q_m^2 \Delta_{\mp m} & 0 \\ 0 & t_m \Delta_{\mp m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_m \Delta_{\mp m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

где $q^j = \rho n_j$, $r^j = n_j / \rho$, $l^j = \rho c^2 n_j$, n_j — проекция нормали n на координатные оси x_j , $j = 1, 2$. Заметим, что подобно [5] аппроксимация конвективных членов выбрана с учетом знака скорости, а для членов с давлением в уравнениях движения — по сопряженным к ним формулам. Приближенно факторизуя стабилизирующий оператор в (9), рассмотрим разностную схему

$$\prod_{m=1}^2 (I + \tau\alpha B_m^1 \Delta_m) (I + \tau\alpha B_m^2 \Delta_m) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\frac{1}{V} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n, \quad (11)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{1}{V} (A^{-1})^n \mathbf{R}^n, \\ (I + \tau\alpha B_1^1 \Delta_1) \xi^{n+1/4} &= \xi^n, \quad (I + \tau\alpha B_1^2 \Delta_1) \xi^{n+1/2} = \xi^{n+1/4}, \\ (I + \tau\alpha B_2^1 \Delta_2) \xi^{n+3/4} &= \xi^{n+1/2}, \quad (I + \tau\alpha B_2^2 \Delta_2) \xi^{n+1} = \xi^{n+3/4}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned}$$

Схема (11) аппроксимирует исходные уравнения с тем же порядком что и (9), но реализуется на дробных шагах скалярными прогонами (см. [10]). Изложенные выше алгоритмы описаны для случая четырехгранных ячеек. Очевидно, что аналогично могут быть построены схемы и других форм ячеек, более удобных при аппроксимации областей со сложными криволинейными границами. В качестве недостатка при аппроксимации МКО отметим усложнение расчетных формул, полученных при усреднении функций по ячейке.

1.2. Алгоритм расщепления по физическим процессам

С учетом введенных упрощений (7) стабилизирующий оператор схемы (8) может быть представлен в виде: $I + \tau\alpha \sum_{m=1}^2 \Delta_m = I + \tau\alpha L$, где

$$L = B_1^n \Delta_1 + B_2^n \Delta_2 = \begin{pmatrix} t & q_1 & q_2 & 0 \\ 0 & t & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & t & r_2 \\ 0 & l_1 & l_2 & t \end{pmatrix},$$

$t = t_1 \Delta_1 + t_2 \Delta_2$, $q_i = q_1^i \Delta_1 + q_2^i \Delta_2$, $r_i = r_1^i \Delta_1 + r_2^i \Delta_2$, $l_i = l_1^i \Delta_1 + l_2^i \Delta_2$. Введем расщепление оператора L по физическим процессам, позволяющее свести решение системы уравнений к независимому решению отдельных уравнений, т. е. представим оператор L в виде суммы

$$L = L_1 + L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & l_1 & l_2 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & q_1 & q_2 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приближенно факторизуя оператор $I + \tau\alpha L$, рассмотрим разностную схему

$$(I + \tau\alpha L_1)(I + \tau\alpha L_2) \frac{\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n}{\tau} = -\frac{1}{V}(A^{-1})^n \mathbf{R}^n, \quad (12)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{(A^{-1})^n}{V} \mathbf{R}^n, \\ (I + \tau\alpha L_1) \xi^{n+1/2} &= \xi^n, \\ (I + \tau\alpha L_2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \\ \mathbf{f}^{n+1} &= \mathbf{f}^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned}$$

Как следует из вида разностных операторов L_j разностная схема (12) реализуется на дробных шагах независимо для каждого уравнения (подробнее см. [10]). Таким образом, разностная схема (16), основанная на расщеплении операторов по физическим процессам, позволяет свести решение системы уравнений к решению отдельных уравнений.

1.3. Диссипативные свойства алгоритмов

Проведем анализ диссипативных свойств рассмотренных выше схем приближенной факторизации: с расщеплением операторов по пространственным направлениям (схема (9)), расщеплением по пространственным направлениям и физическим процессам (11) и с расщеплением по физическим процессам (12). Введем следующие обозначения: $Q_m^i = \tau\alpha q_m^i \Delta_{\mp m}$, $R_m^i = \tau\alpha r_m^i \Delta_{\pm m}$, $L_m^i = \tau\alpha l_m^i \Delta_{\mp m}$, $T_m = 1 + \tau\alpha t_m \Delta_{\mp m}$, $T_0 = T_1 + T_2 - 1$, где коэффициенты t_m , q_m^i , r_m^i , l_m^i определены выше, а знаки в операторах $\Delta_{\mp m}$ выбраны в зависимости от знака скорости t_m . С учетом введенных обозначений стабилизирующий оператор $C_0 = I + \tau\alpha L$ в нефакторизованной схеме (8) может быть представлен в виде

$$C_0 = \begin{pmatrix} T_0 & Q_1^1 + Q_2^1 & Q_1^2 + Q_2^2 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & R_1^1 + R_2^1 \\ 0 & 0 & T_0 & R_1^2 + R_2^2 \\ 0 & L_1^1 + L_2^1 & L_1^2 + L_2^2 & T_0 \end{pmatrix}.$$

Для схемы (9) стабилизирующий оператор представим в виде

$$C_1 = \prod_{m=1}^2 (I + \tau\alpha B_m^n \Delta_m) = \begin{pmatrix} T_1 T_2 & T_1 Q_2^1 + T_2 Q_1^1 & T_1 Q_2^2 + T_2 Q_1^2 & Q_1^1 R_2^1 + Q_2^1 R_1^1 \\ 0 & T_1 T_2 + R_1^1 L_2^1 & R_1^1 L_2^2 & R_2^1 T_1 + R_1^1 T_2 \\ 0 & R_1^2 L_2^1 & T_1 T_2 + R_1^2 L_2^2 & T_1 R_2^2 + T_2 R_1^2 \\ 0 & T_1 L_2^1 + T_2 L_1^1 & T_1 L_2^2 + T_2 L_1^2 & T_1 T_2 + L_1^1 R_2^1 + R_2^1 L_1^1 \end{pmatrix}$$

и диссипативная матрица $D_1 = C_1 - C_0$, как легко видеть, содержит дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$, т. е. в каждом разностном уравнении при временных производных содержатся диссипативные члены вида $\tau^2 \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_m} S_{ml} \frac{\partial}{\partial x_l}$.

Для разностной схемы (10) стабилизирующий оператор C_2 содержит все дополнительные члены, как и в схеме (9) и, кроме того, дополнительные члены третьего порядка малости. Наконец, для схемы приближенной факторизации (12) с расщеплением по физическим процессам, стабилизирующий оператор C_3 имеет вид:

$$C_3 = (I + \tau\alpha L_1)(I + \tau\alpha L_2) = 0 + (t_0 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1^1 + L_2^1 & L_1^2 + L_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

и содержит дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ лишь в последней строке, т. е. только в разностном уравнении энергии. На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы: схема расщепления по физическим процессам (12) по своим свойствам наиболее близка к нефакторизованной схеме. Ее реализация на каждом дробном шаге требует итераций для каждого уравнения. Схемы приближенной факторизации (9) и (11) близки по своим свойствам, но содержат в каждом уравнении дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ и $O(\tau^3)$. Заметим, что схема (11) реализуется на дробных шагах скалярными прогонками, а схема (9) — векторными.

2. Алгоритмы МКО для уравнений Эйлера несжимаемой жидкости

Представим уравнения Эйлера в виде интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема Ω с границей $d\Omega$

$$M \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{W} ds = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ v_1 \mathbf{v} + p e_1 \\ v_2 \mathbf{v} + p e_2 \\ v_3 \mathbf{v} + p e_3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомые функции, как и выше, будем определять в центре ячейки j_1, j_2, j_3 , а значения потоков через границу в дробных ячейках $j_{m\pm 1/2}$ ($m = 1, 2, 3$). Подобно разделу 1 введем сеточные функции как среднее значение по объему, а контурные интегралы по ячейкам аппроксимируем со вторым порядком точности. Рассмотрим разностную схему с весами

$$VM \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} + \alpha \mathbf{R}^{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{R}^n = 0, \quad (2)$$

аппроксимирующую уравнения (1) с порядком $O(\tau^l + h^2)$, где $l = 2$ при $\alpha = 0.5$ и $l = 1$ при $\alpha \neq 0.5$, $h = \max(V/S)$.

Линеаризуем вектор \mathbf{W}^{n+1} относительно вектора искомых функций \mathbf{U} : $\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n + B_1^n \Delta \mathbf{U}^n + O(\tau^2)$, $\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$, где

$$B_1 = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1 & t + v_1 n_1 & v_1 n_2 & v_1 n_3 \\ n_2 & v_2 n_1 & t + v_2 n_2 & v_2 n_3 \\ n_3 & v_3 n_1 & t + v_3 n_2 & t + v_3 n_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

n_i — проекции вектора нормали на координатные оси x_i , $t = v_n = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль n . Тогда с учетом линеаризации схема (2) может быть представлена в виде

$$M \Delta \mathbf{U} + \frac{\tau\alpha}{V} N_1 = -\frac{\tau}{V} \mathbf{R}^n, \quad (4)$$

где $N_1 = \sum_{m=1}^3 [(SB_1 \Delta \mathbf{U})_{j_m+1/2} - (SB_1 \Delta \mathbf{U})_{j_m-1/2}]$ и аппроксимирует уравнения (1) с тем же порядком, что и базовая схема (2). Представим матричный оператор B_1 в виде суммы операторов

$$B_1 = B + B_0 = \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1 & t & 0 & 0 \\ n_2 & 0 & t & 0 \\ n_3 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 n_1 & v_1 n_2 & v_1 n_3 \\ 0 & v_2 n_1 & v_2 n_2 & v_2 n_3 \\ 0 & v_3 n_1 & v_3 n_2 & v_3 n_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} + \mathbf{N}_0$, $\mathbf{N}_0 = \sum_{m=1}^3 [(SB_0 \Delta \mathbf{U})_{j_m+1/2} - (SB_0 \Delta \mathbf{U})_{j_m-1/2}]$. Так как $\Delta \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$, то $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_0^{n+1} - \mathbf{N}_0^n = \sum_{m=1}^3 [(SB_0 \mathbf{U}^{n+1})_{j_m+1/2} - (SB_0 \mathbf{U}^{n+1})_{j_m-1/2}] - \sum_{m=1}^3 [(SB_0 \mathbf{U}^n)_{j_m+1/2} - (SB_0 \mathbf{U}^n)_{j_m-1/2}]$. Вектор \mathbf{N}_0 согласно (5) можно записать в виде:

$$\mathbf{N}_0 = \sum_{m=1}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ (v_1 St)_{j_m+1/2} - (v_1 St)_{j_m-1/2} \\ (v_2 St)_{j_m+1/2} - (v_2 St)_{j_m-1/2} \\ (v_3 St)_{j_m+1/2} - (v_3 St)_{j_m-1/2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 R_0 \\ v_2 R_0 \\ v_3 R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

как следствие равенства нулю сеточного аналога $R_0 = \sum_{m=1}^3 [(St)_{j_m+1/2} - (St)_{j_m-1/2}] = 0$ интегрального уравнения неразрывности $\oint_S v_n ds = 0$. Заметим, что приближенное равенство (6) выполнено с погрешностью $O(h^2)$. С учетом упрощений разностная схема (4) примет вид

$$M \Delta \mathbf{U} + \frac{\tau \alpha}{V} \mathbf{N} = -\frac{\tau}{V} \mathbf{R}, \tag{7}$$

где $\mathbf{N} = \sum_{m=1}^3 [(SB \Delta \mathbf{U})_{j_m+1/2} - (SB \Delta \mathbf{U})_{j_m-1/2}]$. Как и схема (4) она аппроксимирует уравнение (1) с погрешностью $O(\tau^l + h^2)$, линейна относительно \mathbf{U}^{n+1} и немонотонна в силу симметричной аппроксимации контурного интеграла в (1).

Подобно разделу 1 проведем замену симметричных аппроксимаций в \mathbf{R} на несимметричные с первым порядком по пространству. Тогда разностная схема (7) после упрощений может быть представлена в виде

$$\left(M + \frac{\tau \alpha}{V} \sum_{m=1}^3 B_m^n \Delta_m \right) \Delta \mathbf{U}^n = -\frac{\tau}{V} \mathbf{R}^n, \tag{8}$$

где B_m выбрано как полусреднее значение элементов матриц $B_{m+1/2}$ и $B_{m-1/2}$, а $B_m \Delta_m$ аппроксимация операторов в направлении x_m с учетом знака скорости подобно формуле (7) раздела 1. Она линейна и аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau^l + \tau h + h^2)$. В силу вырожденности матрицы M (уравнение неразрывности стационарно) непосредственно разрешить разностные уравнения (7) не удастся и поэтому обычно применяется либо метод расщепления (см., например, [6]), либо вводится слабая сжимаемость уравнений, т. е. вводятся дополнительные члены в уравнение неразрывности (см., [11]).

2.1. Алгоритмы расщепления в уравнениях Эйлера

В работе [4] для решения уравнений Навье — Стокса несжимаемой жидкости рассматривались специальные алгоритмы расщепления с явной аппроксимацией конвективных и вязких членов и неявной аппроксимацией давления и уравнения неразрывности. Построенные схемы являлись условно устойчивыми. Полностью неявная схема расщепления типа стабилизирующей поправки предложена в работе [6]. Ниже рассмотрены неявные разностные схемы с различной формой расщепления уравнений. Представим нефакторизованную разностную схему (8) в виде

$$[M + \tau \alpha (B^1 + B^2)] \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\frac{1}{V} \mathbf{R}, \tag{9}$$

соответствующем расщеплению матричных операторов по физическим процессам, где $\frac{1}{V} \sum_{m=1}^3 B_m \Delta_m =$

$\frac{1}{V} \sum_{m=1}^3 (B_m^1 + B_m^2) \Delta_m = B^1 + B^2$, а операторы B_m^j равны:

$$B_m^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_m \end{pmatrix}, \quad B_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & (n_1)_m & (n_2)_m & (n_3)_m \\ (n_1)_m & 0 & 0 & 0 \\ (n_2)_m & 0 & 0 & 0 \\ (n_3)_m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Так как $B^1 M = B^1$, то $M + \tau\alpha(B^1 + B^2) \approx (I + \tau\alpha B^1)(M + \tau\alpha B^2) = C_1$, Тогда разностная схема

$${}_1 \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\frac{1}{V} \mathbf{R} \quad (11)$$

или эквивалентная ей схема в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{1}{V} \mathbf{R}^n, \quad (I + \tau\alpha B^1) \xi^{n+1/2} = \xi^n, \\ (I + \tau\alpha B^2) \xi^{n+1} &= \xi^{n+1/2}, \quad \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \tau \xi^{n+1} \end{aligned} \quad (12)$$

аппроксимирует исходные уравнения Эйлера (1) с тем же порядком $O(\tau^l + h^2)$, что и базовая нефакторизованная схема (8). Остановимся на ее реализации. Нулевой шаг $\xi^n = -\frac{1}{V} \mathbf{R}^n$ определяется явно. Будем полагать, что на n -ом временном слое уравнение неразрывности выполнено и его сеточный аналог $R_0 \equiv 0$. Тогда на первом дробном шаге схемы (12) система разностных уравнений

$$\xi_0^{n+1/2} = \xi_0^n \equiv 0,$$

$$\xi_j^{n+1/2} + \frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 t_m^n \Delta_{\mp m} \xi_j^{n+1/2} = \xi_j^{n+1/2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

может быть решена независимо для каждой компоненты $\xi_j^{n+1/2}$ одним из известным методом. На втором дробном шаге разностные уравнения

$$\frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j)_m \Delta_m \xi_j^{n+1} = \xi_0^{n+1/2} = 0,$$

$$\xi_j^{n+1} + \frac{\tau\alpha}{V} \sum_{k=1}^3 (n_j)_k \Delta_k \xi_p^{n+1} = \xi_j^{n+1/2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

решается в следующей последовательности: исключая ξ_j^{n+1} из разностного аналога уравнения неразрывности приходим к уравнению относительно ξ_p^{n+1}

$$\frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j)_m \Delta_m \xi_j^{n+1/2} = \frac{\tau^2 \alpha^2}{V^2} \sum_{m=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left((n_j)_m \Delta_m \sum_{k=1}^3 (n_j)_k \Delta_k \xi_0^{n+1} \right). \quad (13)$$

Уравнение (13) — разностный аналог уравнения Пуассона, содержащего смешанные производные и известную правую часть. Его решение может быть получено известными методами (см., например [7]), после чего явно определяется значение ξ_j^{n+1} . Заметим, что выполнение разностного аналога стационарного уравнения неразрывности эквивалентно его удовлетворению на слое n и $n+1$ в силу соотношения $\xi_j^{n+1} = v_j^{n+1} - v_j^n$. Наконец, из последнего уравнения схемы (12) явно вычисляются значения функций на $n+1$ слое. Таким образом, реализация схемы (11) сводится к решению отдельных уравнений для компонент скорости и решению уравнения Пуассона для давления (точнее для их невязок).

Схема приближенной факторизации с расщеплением операторов по физическим процессам и пространственным переменным строится аналогично схеме (11). Заменяя стабилизирующий оператор схемы (9) на факторизованный, получим разностную схему

$$\prod_{j=1}^3 \left(I + \frac{\tau\alpha}{V} B_m^1 \right) \left(M + \frac{\tau\alpha}{V} B_m^2 \right) \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = -\frac{1}{V} \mathbf{R}^n \quad (14)$$

или эквивалентную ей схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \xi^n &= -\frac{1}{V} \mathbf{R}^n, \\ \left(I + \frac{\tau\alpha}{V} B_1^1 \right) \xi^{n+1/6} &= \xi^n, \quad \left(M + \frac{\tau\alpha}{V} B_1^2 \right) \xi^{n+2/6} = \xi^{n+1/6}, \\ &\dots \\ \left(I + \frac{\tau\alpha}{V} B_3^1 \right) \xi^{n+5/6} &= \xi^{n+4/6}, \quad \left(M + \frac{\tau\alpha}{V} B_3^2 \right) \xi^{n+1} = \xi^{n+5/6}, \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \tau \xi^{n+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как следует из вида разностных операторов B_m^l , разностная схема (15) на дробных шагах реализуется скалярными прогонками.

2.2. Диссипативные свойства алгоритмов

Остановимся на диссипативных свойствах схемы (11) с расщеплением по физическим процессам. Введем обозначения: $Q = \frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 t_m \Delta_{\mp m}$, $t_0 = 1 + Q$, $L_i = \frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 (n_i)_m \Delta_{\mp m}$, $\bar{L}_i = \frac{\tau\alpha}{V} \sum_{m=1}^3 (n_i)_m \Delta_{\mp m}$, где верхний знак в операторах L_i и \bar{L}_i выбирается при $t_m \geq 0$ и нижний при $t_m < 0$. Тогда стабилизирующий оператор нефакторизованной схемы (9) представляется в виде

$$C_0 = M + \tau\alpha(B^1 + B^2) = \begin{pmatrix} 0 & L_1 & L_2 & L_3 \\ \bar{L}_1 & t_0 & 0 & 0 \\ \bar{L}_2 & 0 & t_0 & 0 \\ L_3 & 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix}.$$

В схеме приближенной факторизации с расщеплением по физическим процессам (11) возникают дополнительные члены порядка $O(\tau^2)$ в уравнениях движения. Действительно

$$C_1 = (I + \tau\alpha B^1)(M + \tau\alpha B^2) = C_0 + \tau^2 \alpha^2 B_1^1 B_2^2 = C_0 + D,$$

где

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q\bar{L}_1 & 0 & 0 & 0 \\ Q\bar{L}_2 & 0 & 0 & 0 \\ Q\bar{L}_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении схемы (11) с заменой второго дробного шага на первый, дополнительные члены возникают лишь в уравнении неразрывности, что следует из вида

$$D = \tau^2 \alpha^2 B^2 B^1 = \begin{pmatrix} 0 & L_1 Q & L_2 Q & L_3 Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание

1. В настоящей работе построены разностные схемы на основе МКО для численного решения уравнений Эйлера сжимаемого газа и несжимаемой жидкости. Подобные схемы могут быть обобщены и для уравнений Навье—Стокса сжимаемого теплопроводного газа и несжимаемой жидкости. При этом вязкие члены в уравнениях Навье—Стокса могут аппроксимироваться на дробных шагах, например, совместно с конвективными членами.

2. Построенные алгоритмы ориентированы на регулярные сетки. Алгоритмы с расщеплением по физическим процессам наряду с регулярными сетками могут применяться и при решении уравнений Эйлера и Навье—Стокса на нерегулярных неструктурированных сетках, так как его реализация сводится к последовательному решению отдельных уравнений для компонент скоростей и давления. Эти алгоритмы могут служить базовыми для решения на многопроцессорных ЭВМ.

Список литературы

- [1] ФЛЕТЧЕР К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, Т. 1, 2. 1991.
- [2] РОУЧ П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
- [3] ГОДУНОВ С. К., ЗАБРОДИН А. В., ИВАНОВ М. Я. и др. Численные методы решения многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1989. 614 с.
- [4] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.
- [5] КОВЕНЯ В. М., ЯНЕНКО Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.

-
- [6] Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их приложения к проблемам аэродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
- [7] Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [8] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 614 с.
- [9] Ковеня В. М. Схемы расщепления в методе конечных объемов // Журн. вычисл. математики и мат. физик. 2001. Т. 41, № 1. С. 100–113.
- [10] Ковеня В. М. Применение алгоритмов расщепления в методе конечных объемов // Вычислит. технологии. 2001. Т. 6, № 2. С. 84–103.
- [11] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.