ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Н. Т. Данаев, Б. А. Урмашев
Казахский государственный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: janibekbb@yahoo.com

The work is devoted to finite difference methods of a solution of the stationary equations of the Navier — Stokes for an incompressible liquid in variables "a velocity, pressure". The three-parametrical iterative algorithms for a solution of the grid equations originating for want of use of the schemes of decomposition are considered. The method of a priori valuations proves the theorems of convergence.

Для численного решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости в переменных "скорость, давление" часто используются разностные схемы расщепления вида [1]

$$B\frac{\vec{u}^{n+1/2}-\vec{u}^{n}}{\tau}+L_h\vec{u}^{n}+\overline{\mathrm{grad_h}}p^{n}=\nu\Delta_h\vec{u}^{n}+\vec{f}(x), \tag{1}$$

$$\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n+1/2}}{\tau}+\overline{\mathrm{grad_h}}(p^{n+1}-p^{n})=0, \tag{2}$$

$$\underline{\mathrm{div}}_h\vec{u}^{n+1}=0, \tag{3}$$

где $B=\prod\limits_{\alpha=1}^{N}(E+\omega R_\alpha)$, $E+\omega R_\alpha$, $\alpha=\overline{1,N}$ — операторы, позволяющие использовать метод скалярной прогонки, $L_h\vec{u}^n$ — соответствует разностной аппроксимации нелинейных конвективных слагаемых в уравнений движения, Δ_h — разностный оператор Лапласа, $\overline{\mathrm{grad}}_h p=\{p_{x_1},p_{x_2},\ldots,p_{x_N}\}$, $\underline{\mathrm{div}}_h\vec{u}=u^{(1)}_{\bar{x}_1}+u^{(2)}_{\bar{x}_2}+\ldots+u^{(N)}_{\bar{x}_N}$, τ — шаг сетки по времени. Здесь и в дальнейшем использованы общепринятые обозначения в теории разностных схем [2].

Предполагается, что в численных расчетах компоненты вектора скорости U_m, $m=\overline{1,N}$ определены в узлах соответствующих сеток

$$D_{m,h}=\{(l_1h,l_2h,...,l_{m-1}h,(l_m+1/2)h,l_{m+1}h,...,l_Nh)\},$$

$$l_k=\overline{0,M},\quad k\neq m,\quad l_m=\overline{0,M-1},\quad Mh=1,$$

а значения давления в узлах

$$D_h=(l_1h,l_2h,...,l_Nh),\quad i_k=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}$$

и заданы значения компоненты скорости на соответствующих участках границы $\partial D_{m,h}$.

Для нахождения значений $\vec{u},p$ на каждом временном слое из соотношении (2), (3) имеем систему алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}\vec{u}+\tau\mathrm{grad_h p}&=\mathrm{\tilde{a}(x)},\\ \mathrm{div_h\tilde{u}}&=0,\mathrm{x}\in\mathrm{D_h},\\ (\vec{u},\vec{n})&=0,x\in\partial D_h,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\vec{a}(x)$ — известная сеточная вектор-функция.

В работах [3, 4] для численной реализации решений уравнении (4) разработаны итерационные схемы и исследованы свойства сходимости. В данной работе для решения уравнений (4) рассматриваются трехпараметрические итерационные алгоритмы.

© Н. Т. Данаев, Б. А. Урмашев, 2001.

Для нахождения решения разностной задачи (4) рассмотрим следующий трехпараметрический итерационный процесс:

$$\begin{gathered}\alpha(u_m^{n+1,s+1}-u_m^{n+1,s})+u_m^{n+1,s}+\tau(p^{n+1,s}-\tau_1\underline{\mathrm{div}}_h\vec{u}^{n+1,s})_{x_m}=\tau\tau_1(u_{m,x_m}^{n+1,s+1}-u_{m,x_m}^{n+1,s})_{\overline{x}_m}+a_m,\ m=\overline{1,N}\\ \frac{p^{n+1,s+1}-p^{n+1,s}}{\tau_2}+\underline{\mathrm{div}}_h\vec{u}^{n+1,s+1}=0,\end{gathered}\tag{5}$$

где α, $\tau_1>0$, $\tau_2>0$ — итерационные параметры.

Для итерационного процесса (5) справедлива

Теорема 1. *Если $\delta\ge N$, $\alpha\ge 1$ и $\tau_1\ge\tau_2$, то итерационный процесс (5) сходится к решению разностной схемы (4) и для погрешности справедлива оценка:*

$$\begin{gathered}2\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2+\tau(\tau_1-\tau_2)\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\\ +\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1(\delta-N)\sum_m\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}-\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2+E^{s+1}-E^s\le 0,\end{gathered}$$

где $E^s=(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}\|+\dfrac{\tau}{\tau_2}\|\pi^s\|^2+\tau\tau_1\delta\sum\limits_m\|\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2$, $\vec{\omega}^s=\vec{u}^{n+1,s}-\vec{u}$, $\quad\pi^s=p^{n+1,s}-p$.

Доказательство. Для погрешности итерационного процесса из выражений (4) и (5) вытекают соотношения

$$\alpha(\Omega_m^{s+1}-\Omega_m^s)+\Omega_m^s+\tau(\pi^s-\tau_1\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s)_{x_m}=\tau\tau_1\delta(\Omega_{m,x_m}^{s+1}-\Omega_{m,x_m}^s)_{\overline{x}_m},\quad m=\overline{1,N}\tag{6}$$

$$\frac{\pi^{s+1}-\pi^s}{\tau_2}+\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s=0\tag{7}$$

с нулевыми краевыми условиями для $\vec{\omega}^s$, т. е.

$$(\vec{\omega}^{s+1},\vec{n})=0,\quad \vec{x}\in\partial D_h$$

Умножая (6) скалярно на Ω_m^{s+1}, имеем

$$\begin{gathered}\alpha(\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2-\|\vec{\omega}^s\|^2+\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2)+\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\|\vec{\omega}^s\|^2-\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2-2\tau(\pi^s,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1})+\\ +2\tau\tau_1(\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1})+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N(\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}\|^2-\|\Omega_{m,x_m}^s\|^2+\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}-\Omega_{m,x_m}^s\|^2)=0\end{gathered}\tag{8}$$

Отсюда после несложных преобразований, получим

$$\begin{gathered}(\alpha+1)\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2-(\alpha-1)\|\vec{\omega}^s\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N(\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}\|_{(m)}^2-\\ -\|\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2+\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}-\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2)+\frac{\tau}{\tau_2}(\|\pi^{s+1}\|^2-\|\pi^s\|^2)+\\ +\tau(\tau_1-\tau_2)\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s\|^2=\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h(\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s)\|^2.\end{gathered}$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$\|\underline{\mathrm{div}}_h(\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s)\|^2\le N\sum_{m=1}^N(\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}\|-\|\Omega_{m,x_m}^s\|)_{(m)}^2,$$

имеем

$$\begin{gathered}(\alpha+1)\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2-(\alpha-1)\|\vec{\omega}^s\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N(\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}\|_{(m)}^2-\\ -\|\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2+\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}-\Omega_{m,x_m}^s\|_{(m)}^2)+\frac{\tau}{\tau_2}(\|\pi^{s+1}\|^2-\|\pi^s\|^2)+\\ +\tau(\tau_1-\tau_2)\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s\|^2\le\tau\tau_1N\sum_{m=1}^N(\|\Omega_{m,x_m}^{s+1}\|-\|\Omega_{m,x_m}^s\|)_{(m)}^2.\end{gathered}$$

Далее

$$2\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1(\delta-N)\sum_{m=1}^N\|\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}\|^2_{(m)}+$$
$$+\tau(\tau_1-\tau_2)\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2+$$
$$+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N\|\Omega^{s+1}_{m,x_m}\|^2_{(m)}+\frac{\tau}{\tau_2}\|\pi^{s+1}\|^2\le(\alpha-1)\|\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N\|\Omega^s_{m,x_m}\|^2_{(m)}+\frac{\tau}{\tau_2}\|\pi^s\|^2.$$

Следовательно, имеем следующую априорную оценку

$$\begin{aligned}&2\|\vec{\omega}^{s+1}\|^2+(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1(\delta-N)\sum_{m=1}^N\|\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}\|^2_{(m)}+\\&+\tau(\tau_1-\tau_2)\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|^2+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s\|^2+E^{s+1}-E^s\le0,\end{aligned}\tag{9}$$

где $E^s=(\alpha-1)\|\vec{\omega}^s\|^2+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N\|\Omega^s_{m,x_m}\|^2_{(m)}+\dfrac{\tau}{\tau_2}\|\pi^s\|^2$.

Справедлива также следующая теорема о скорости сходимости.

Теорема 2. *Если $\delta>N$, $\alpha\ge1$ и $\tau_1\ge\tau_2$, то итерационный процесс (5) сходится к решению разностной схемы (4) со скоростью геометрической прогрессии, причем выполняется следующее рекуррентное соотношение:*

$$F^{s+1}=qF^s,\quad q<1,$$
$$F^s=(\alpha-\beta K)\|\vec{\omega}^s\|^2+\frac{\tau}{\tau_2}\|\pi^s\|^2+\left(\frac{h^2}{4}+\tau\tau_1\delta\right)\sum_m\|\Omega^s_{m,\overline{x}_m}\|^2_{(m)},$$

где $q=\max\left[\dfrac{\alpha-1}{\alpha-\beta K},1-2\beta\tau\tau_2C_0^2,\dfrac{\tau\tau_1\delta}{\frac{h^2}{4}+\tau\tau_1\delta}\right]$, β, C_0 — равномерно ограниченные константы, не зависящие от параметров сетки.

Доказательство. Из выражения (6) для любой сеточной функции $\vec{\varphi}\in\overset{0}{W}{}^1_2$ имеем

$$\alpha(\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})+(\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})+\tau(\nabla_h\pi^s,\vec{\varphi})-\tau\tau_1(\nabla_h\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})=\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N(\Omega^{s+1}_{m,x_m\overline{x}_m}-\Omega^s_{m,x_m\overline{x}_m},\varphi_m)=0,$$

далее, используя формулы суммирования по частям, получим

$$\tau(\nabla_h\pi^s,\vec{\varphi})=-(\alpha-1)(\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})-(\vec{\omega}^{s+1},\vec{\varphi})-\tau\tau_1(\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\varphi})-\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N(\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m},\varphi_{m,\overline{x}_m}),$$
$$\tau|(\nabla_h\pi^s,\vec{\varphi})|\le(\alpha-1)|(\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})|+|(\vec{\omega}^s,\vec{\varphi})|+\tau\tau_1(\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\varphi})|+$$
$$+\tau\tau_1\delta|\sum_{m=1}^N(\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m},\varphi_{m,\overline{x}_m})|\le\overline{C}\Big((\alpha-1)|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|\|\vec{\varphi}\|_{\vec{\varphi}\in\overset{0}{W}{}^1_2}+$$
$$+\|\vec{\omega}^{s+1}\|\|\vec{\varphi}\|_{\vec{\varphi}\in\overset{0}{W}{}^1_2}+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|\|\vec{\varphi}\|_{\vec{\varphi}\in\overset{0}{W}{}^1_2}+\tau\tau_1\sum_{m=1}^N\|\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}\|\|\vec{\varphi}\|_{\vec{\varphi}\in\overset{0}{W}{}^1_2}\Big),$$

где $\overline{C}$ — равномерно ограниченная константа, не зависящая от τ,τ_0 и h. Отсюда, принимая во внимание известное неравенство [5],

$$\overline{\overline{C}}\|\pi^s\|_{L_2}\le\tau\sup_{\|\vec{\varphi}\|_{\overset{0}{W}{}^1_2}=1}|(\nabla_h\pi^s,\vec{\varphi})|,\tag{10}$$

справедливое для любой сеточной функции, удовлетворяющей дополнительному условию

$$\sum_{m=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\pi_{km}=0,$$

имеем

$$\tau C_0\|\pi_s\|_{L_2}\le(\alpha-1)\|\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s\|+\|\vec{\omega}^{s+1}\|+\tau\tau_1\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}\|+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^N\|\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}\|.$$

Отсюда следует, что

$$\tau^2 C_0^2 ||\pi_s||^2 \le K((\alpha-1)||\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s||^2 + ||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + \tau\tau_1||\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^{s+1}||^2 + \tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)}). \quad (11)$$

Умножая (11) на β и прибавив (9) получим

$$(2-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + (\alpha-1)(1-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s||^2 + \tau\tau_1(1-\beta K)||\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s||^2 +$$
$$+\tau\tau_1(\delta-N-\beta\delta K)\sum_m||\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)} + (\alpha-1)||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + \tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^{s+1}||^2 \le$$
$$\le (\alpha-1)||\vec{\omega}^s||^2 + \tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^s||^2 - \tau^2\beta C_0^2||\pi^s||^2.$$

Отсюда,

$$(1-\alpha-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + (\alpha-1)(1-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}-\vec{\omega}^s||^2 + \tau\tau_1(1-\beta K)||\underline{\mathrm{div}}_h\vec{\omega}^s||^2 +$$
$$+\tau\tau_1(\delta(1-\beta K)-N)\sum_m||\Omega^{s+1}_{m,x_m}-\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)} +$$
$$+\tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^{s+1}||^2 \le (\alpha-1)||\vec{\omega}^s||^2 + \tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}(1-\tau\tau_2\beta C_0^2)||\pi^s||^2.$$

Выберем число $\beta > 0$, удовлетворяющее условиям:

$$1-\beta K > 0,$$
$$\tau\tau_1(\delta(1-\beta K)-N) \ge 0.$$

С учетом неравенства

$$||\vec{\omega}^{s+1}||^2 \ge \frac{h^2}{4}\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}||^2,$$

получим

$$(\alpha-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + (\tau\tau_1\delta+\tfrac{h^2}{4})\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^{s+1}||^2 \le$$
$$\le (\alpha-1)||\vec{\omega}^s||^2 + \tau\tau_1\delta\sum_{m=1}^{N}||\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}(1-\tau\tau_2\beta C_0^2)||\pi^s||^2.$$

Далее

$$(\alpha-\beta K)||\vec{\omega}^{s+1}||^2 + (\tau\tau_1\delta+\tfrac{h^2}{4})\sum_{m=1}^{N}||\Omega^{s+1}_{m,x_m}||^2_{(m)} + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^{s+1}||^2 \le$$
$$\le \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta K}(\alpha-\beta K)||\vec{\omega}^s||^2 + \frac{\tau}{\tau_2}(1-\tau\tau_2\beta C_0^2)||\pi^s||^2 + \frac{\tau\tau_1\delta}{\tau\tau_1\delta+\frac{h^2}{4}}\left(\tau\tau_1\delta+\frac{h^2}{4}\right)\sum_{m=1}^{N}||\Omega^s_{m,x_m}||^2_{(m)}. \quad (12)$$

Обозначим

$$q = \max\left[\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta K}, 1-2\beta\tau\tau_2 C_0^2, \frac{\tau\tau_1\delta}{\frac{h^2}{4}+\tau\tau_1\delta}\right].$$

Тогда из (12) получим

$$F^{s+1} = qF^s, \quad q < 1,$$
$$F^s = (\alpha-\beta K)||\vec{\omega}^s||^2 + \frac{\tau}{\tau_2}||\pi^s||^2 + \left(\frac{h^2}{4}+\tau\tau_1\delta\right)\sum_m||\Omega^s_{m,\overline{x}_m}||^2_{(m)}.$$

Итак доказано, что итерационный процесс (5) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Список литературы

[1] Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М. : Наука, 1984. 520 с.

[2] Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1988. 616 с.

[3] Данаев Н. Т., Смагулов Ш. С. Некоторые численные методы решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. Алматы. 1995, препринт, № 11 ИА РК. С. 4–10.

[4] Урмашев Б. А., Данаев Н. Т. О сходимости итерационных процессов для решения сеточных уравнений Навье — Стокса // Поиск. Алматы, 2000. № 3. С. 174–181.

[5] Кобелков Г. М. О методах решения уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР, 1978. Т. 243. № 4. С. 843–846.