

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВИХРЕЙ В СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЯХ

Н. М. ТЕРЕХОВА

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: gaonov&itam.nsc.ru

Numerical modeling of the characteristics of streamwise vortices in a supersonic axisymmetric jet in the viscous and inviscid approximations of hydrodynamic stability theory was performed. The regularities and peculiarities of typical relations of various-scale vortices under changed mean flow parameters were studied. The critical Reynolds numbers of stability loss were found.

Введение

В последние годы рядом независимых исследовательских групп экспериментальными методами установлено, что в слое смешения сверхзвуковой осесимметричной неизобарической струи при определенных условиях возникают стационарные или квазистационарные азимутальные неоднородности средних полей потока [1–3]. На шпиренфотографиях они фиксируются в виде продольных черно-белых полос, а при визуализации поперечных сечений высвечивается волнообразная или пилообразная граница сверхзвукового слоя смешения [4]. При этом в струях возникают достаточно большие отклонения от средних значений плотности или избыточного полного давления, что означает наличие азимутальных дефектов этих величин.

Естественно возникает вопрос о природе этих азимутальных неоднородностей. Наиболее реалистична гипотеза о возможности появления в слое смешения первой ячейки колебаний, определяемых вращательной или центробежной неустойчивостью. При движении по искривленным траекториям в слое смешения δ , если при увеличении поперечной координаты r скорость газа падает сильнее чем $1/r$, может возникнуть неустойчивое расслоение, приводящее к возникновению продольных вихревых структур. При их моделировании особое значение отводится учету искривления линий тока в продольном направлении, что происходит в струях, истекающих на нерасчетных режимах.

1. Основные формулы и методы решения

Рассмотрен сжатый слой первой бочки осесимметричной затопленной неизобарической струи (рис. 1). Его поперечная протяженность — от внешней окрестности висячего скачка уплотнения (ВСУ) до границы слоя смешения, а продольная — от ближней окрестности среза сопла до диска Маха. Принято, что форма ВСУ определяет значения радиусов искривления R_0 , а значит и центробежных сил $\sim U^2/R_0$. Продольная протяженность расчетной области выражена через обезразмеренное значение толщины слоя смешения δ (определяющий параметр). Рассмотренный диапазон $0.1 < \delta < 0.65$ соответствует реально реализуемым толщинам слоя смешения. Значения радиусов искривления R_0 можно связать со значениями нерасчетности N . Наиболее реалистичными представляются значения $5 < R_0 < 25$. Рассмотрена затопленная холодная струя воздуха с $\kappa = 1.4$; $\kappa = c_P/c_V$.

Сам сжатый слой состоит из двух подобластей. Первую — от ВСУ до линии максимального значения избыточного полного давления (штриховая линия на рис. 1), называют “невязкой”. В ней восстанавливается полное давление и средняя скорость достигает максимума, а параметры течения определяются из уравнений для идеального газа. Во второй — происходит плавный переход к параметрам в окружающем пространстве, это и есть слой смешения. Значения параметров в первой подобласти при осреднении приняты за характерные.

В слоях смешения δ безразмерные профили продольной средней скорости задаются соотношением!

$$U(r) = \exp(-0.693\eta^2), \quad (1)$$

$\eta = 2(r - r_1)/\delta$, $r_1 = 1 - \delta/2$. Средняя плотность ρ_0 есть:

$$\rho_0 = [1 + (\kappa - 1)M_0^2(1 - U^2)/2]^{-1}.$$

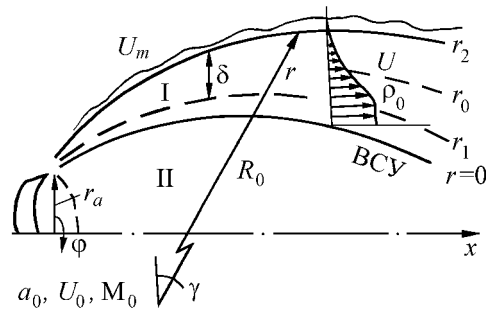


Рис. 1.

Профиль (1) имеет линию перегиба $((\rho_0 U')/r)' = 0$. В качестве характерного линейного масштаба выбрано значение \bar{r} на линии половинной скорости, так что при $r = 1 \quad U = 0.5$. Это значение совпадает с половиной толщины слоя смешения, протяженность которого $r_1 < r < 1 + \delta/2$. Число Маха M_0 также определяется по линии максимальной скорости, его легко связать его с числом Маха истечения M_a .

В качестве криволинейных ортогональных координат выбраны $R = R_0 + r$, где r — изменяющаяся радиальная переменная, а R_0 — радиус кривизны ($R_0 \gg r$), и угловые переменные φ и γ . Соответствующие им компоненты скоростей — v, w, u . В интересующей нас области $R_0 = \text{const}$, а среднее поле параметрически зависит от толщины слоя смешения δ (плоскопараллельное приближение). Тогда продольная координата x вводится как $dx = R_0 d\gamma$.

При невысоких числах Маха истечения возможны некоторые упрощения, так вязкие члены в уравнениях моментов взяты как в несжимаемой жидкости, а уравнение энергии заменено уравнением сохранения энтропии на линии тока.

Для одномерного среднего течения поле скоростей запишется $\bar{u} = |v', w', U(r) + u'|$, где волновые компоненты имеют вид $u' = u(r)e^{i(\alpha x - \omega t + n\varphi)}$. Здесь α^r и n продольное и азимутальное волновые числа, α^i — коэффициент продольного усиления, круговая частота ω — реальна. Для стационарных возмущений α^r и $\omega \sim 0$, поэтому $v', u' = (v, u)(r) \exp(-\alpha^i x) \cos n\varphi$, а $w' = iw(r) \exp(-\alpha^i x) \sin n\varphi$. Значения n определяют число вихрей или вихревых пар по окружности струи — малые n соответствуют крупномасштабным вихрям, а большие — мелкомасштабным. Для невязких возмущений, чтобы избежать особенностей при $U \rightarrow 0$, расчеты проведены при $0.01 < \omega < 0.05$.

В безразмерном виде линеаризованная система уравнений движения и сохранения в искривленной цилиндрической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned}
 iFv + p'/\rho_0 - 2Uu/R_0 &= [Dv - v/r^2 - 2inw/r^2 + (v' - v/R_0 - 2i\alpha u)/R_0]/\text{Re} \\
 iFw + inp/(\rho_0 r) &= [Dw - w/r^2 + 2inv/r^2 + w'/R_0]/\text{Re} \\
 iFu + U'v + i\alpha p/\rho_0 + Uv/R_0 &= [Du + (u' - u/R_0 + 2i\alpha v)/R_0]/\text{Re} \\
 iFM_0^2 p + v' + v/r + inw/r + i\alpha u + v/R_0 &= 0 \\
 F = \alpha U - \omega, \quad Dv = v'' + v'/r - (\alpha^2 + n^2/r^2)v, \quad \text{Re} = \bar{U}\bar{r}/\nu
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

с граничными условиями $v, w, u, p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. Здесь и далее (\prime) означает производную по r . Помимо добавочных конвективных членов $\sim 1/R_0$, старший из которых Uu/R_0 , появились слагаемые и в вязких частях уравнений, связанные с геометрическими эффектами. Введенное выше число Рейнольдса легко перестроить на параметры на срезе сопла, на часто фигурирующее $\text{Re}_L = \text{Re}_d/\sqrt{N}$ и на Re_x .

Решение системы (2) для переменных u, u', w, w', v, p проведено методом ортогонализации. Достаточно сложна задача построения трех линейно независимых векторов для замыкания краевой задачи на собственные значения в цилиндрической системе координат. По методике [5] получено

$$\begin{aligned}
 u &= C_1 Z_n(\lambda_1 r) + C_2 Z_n(\lambda_2 r) \\
 v &= -C_1 i/\alpha Z_n'(\lambda_1 r) - C_2 \alpha/\lambda_2 Z_{n+1}(\lambda_2 r) - C_3 in/r Z_n(\lambda_2 r) \\
 w &= C_1 n/(\alpha r) Z_n(\lambda_1 r) + C_2 i\alpha/\lambda_2 Z_{n+1}(\lambda_2 r) + C_3 Z_n'(\lambda_2 r) \\
 p &= -C_1 \rho_0 F \text{Re} Z_n(\lambda_1 r)/(\alpha(\text{Re} + iM_0^2 F)),
 \end{aligned}$$

где $\lambda_1^2 = (\alpha^2 \text{Re} + i\lambda_2^2 M_0^2 F) / (\text{Re} + iM_0^2 F)$; $\lambda_2^2 = \alpha^2 + i\rho_0 F \text{Re}$. Здесь Z — модифицированные функции Бесселя n -порядка, $Z_n = I_n$ (первого рода) при $r \rightarrow 0$ и $Z_n = 2K_n / (\pi i^{n+1})$ (второго рода) при $r \rightarrow \infty$. Первые вектора в этом представлении соответствуют невязкому приближению, а $\lambda_1 = \lambda_{inv}$ при $\text{Re} \rightarrow \infty$.

Сформулированная краевая задача на собственные значения для определителя (6×6) позволяет изучить многофункциональные связи $\alpha^i = \alpha^i(\text{Re}, M_0, R_0, \delta, n)$ и найти критические числа Рейнольдса, отделяющие области неустойчивости ($\alpha^i < 0$) от областей устойчивости ($\alpha^i > 0$) для продольных вихрей.

2. Результаты и обсуждение

а) Моделирование невязких возмущений

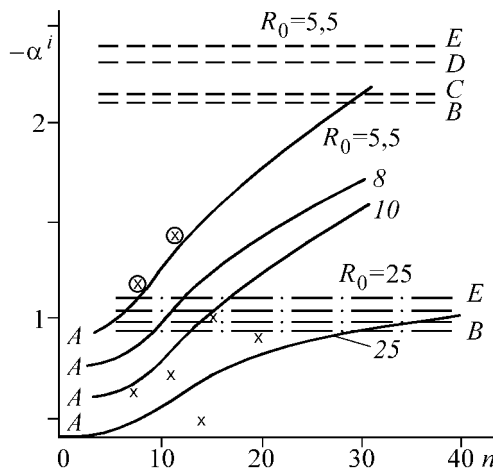


Рис. 2.

Проведено систематическое исследование характеристик и структуры продольно-вихревых возмущений в невязком приближении (система (2) при $1/\text{Re} = 0$ и краевых условиях, соответствующих первому невязкому вектору). Показано, что такие колебания действительно могут иметь место в свободном сверхзвуковом потоке и на рис. 2 приведены их инкременты α^i при $M_0 = 1.5$; $\omega = 0.05$ и толщине $\delta = 0.15$. Получено несколько семейств решений, названных здесь ветвями. Прослежены зависимости как для основной (A), так и для добавочных решений (B — E). Волновые числа с ветви (A) зависят от характеристик потока (изменений δ , R_0 и M_0) и волнового масштаба (значений n). Установлено, что более неустойчивы возмущения высоких мод (мелкомасштабные вихри). Собственные α^i для добавочных ветвей полностью консервативны по многим параметрам и определяются только величиной R_0 . Как показало соответствующее сравнение с данными [1, 3], существует удовлетворительное соответствие экспериментальных и расчетных значений инкрементов волн α^i (крестики на рис. 2). Очевидно, что в реальной струе реализуются волны с характеристиками ветви A.

На рис. 3 для ветви A представлены собственные волновые числа α^r и инкременты α^i в широком диапазоне значений радиусов искривления $5 < R_0 < 30000$ при $\delta = 0.2$ и частоте $\omega = 0.05$. Рассмотрим кратные моды азимутальных чисел $n = 8; 16; 24$. Эти моды наиболее часто выявляются на амплитудных спектрах. Подробно обсудим вариант при $M_0 = 1.5$ для азимутальной моды $n = 16$.

I. Предельно большие $R_0 > 10000$. Этот случай в пределе при $R_0 \rightarrow \infty$ соотносится с изобарическим режимом. Значения инкрементов волн малы и слабо изменяются при изменениях R_0 , а волновые числа остаются постоянными при всех M_0 и R_0 . Вихревые конфигурации в поперечных сечениях $\delta = \text{const}$ даны на рисунке для $0 < n\varphi < \pi$. По существу это форма вихревого движения в расчетной струе при заданном числе Маха. В прикорневой области происходит жгутование противовращающихся вихрей в паре, а далее вниз по потоку — сохранение приобретенной ориентации. В таких структурах преобладают азимутальные перетекания.

II. Большие $R_0 < 200$. При уменьшении R_0 жгутование в прикорневой области сменяется вытеснением первичного вихря во внешнюю область противовращающимся образованием из областей высоких скоростей, так что на некотором интервале в поперечном сечении сосуществует вихревая пара (типа симметричной Кармановской). Растекание струи приводит к исчезновению первоначального вихря, и на некотором интервале ($0.3 < \delta < 0.45$) второй вихрь доминирует. Далее процесс повторяется — в области

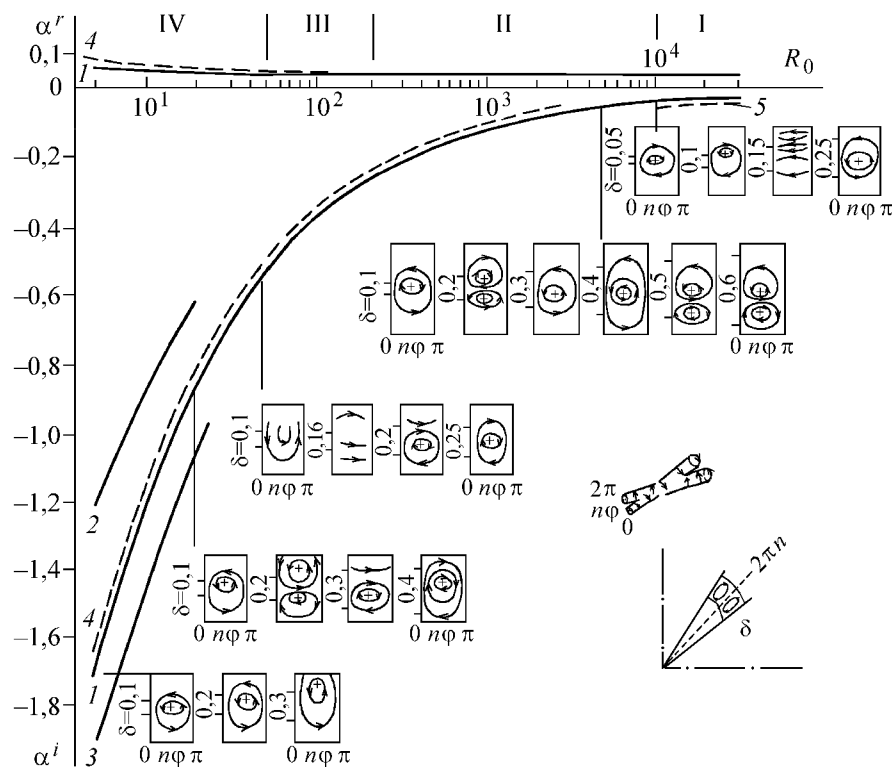


Рис. 3.

внутренней границы возникает следующий вихрь с противовращением и вновь в поперечной области сосуществует вихревая пара. Средние градиенты потока в этой области невелики, вытеснения не происходит, и вихревая пара устойчиво занимает область смещения.

Положительным значениям радиальной скорости (выносу высокоскоростной массы из внутренних областей) соответствуют положительные значения продольной волновой компоненты и наоборот — внос малоскоростного газа из внешних приграничных областей приводит к появлению отрицательных значений u . Существование вихревой пары в поперечном сечении может приводить к распределениям даже с тремя локальными максимумами $|u|$.

III. Умеренные значения $R_0 > 50$. Выделен этот диапазон из-за того, что в вихревых конфигурациях вновь отмечается процесс жгутования в прикорневых областях при малых толщинах слоя смещения и далее — устойчивое существование одиночного вихря вниз по потоку. При этом достаточно сильно возмущаются внешние ($U \sim 0$) и внутренние области ($U \sim 0$).

IV. Малые $R_0 < 50$. Такие значения радиусов искривления имеют место в недорасширенных струях со степенями нерасчетности $N > 1$ и для этих R_0 можно говорить о возмущениях как о продольных вихрях, т.к. определяющими их силами будут являться центробежные. Значения инкрементов указывают на то, что в этих областях α^i очень сильно зависят от значения R_0 , и возмущения заметно пространственно нарастают. Также сильно от величины R_0 зависят вихревые формы. На рис. 3 приведены типичные конфигурации для двух значений R_0 : 20 и 5.

Перестройка вихревой структуры для $R_0 = 20$ происходит так: в первоначальном вихре, у которого радиальные и азимутальные компоненты имеют в прикорневой области один порядок, по мере вытеснения во внешние области значительно уменьшается радиальная и возрастает азимутальная компонента, так что на границе частицы движутся почти по круговым траекториям, как бы обтекая зародившийся во внутренних областях противовращающийся вихрь, в котором уже более существенно радиальное движение. Этот второй вихрь в процессе растекания устойчиво диффундирует к внешней границе. Поперечные распределения продольной компоненты имеют типичный двугорбый вид.

При малых радиусах $R_0 = 5$ существует устойчивый одиночный вихрь, который возмущает область слоя смещения. Соотношение радиального и азимутального перетеканий в нем приблизительно одинаковы, вниз по потоку несколько возрастает азимутальное движение. Распределения плотности в этих волнах полностью коррелируют с распределениями продольной скорости, но максимальные значения $\rho(r)$

смещены в область более высоких потоковых скоростей. На рис. 3 отражены также зависимости α^i для мод $n = 8; 24$ при этом же числе Маха (кривые 2 и 3). Эволюция вихревых конфигураций с изменением n вполне соответствует стадиям, описанным для моды $n = 16$, отличаясь лишь увеличением скорости продольных изменений с ростом n . Несомненно важным и интересным фактом является очень слабая зависимость параметров и формы продольных вихрей от числа Маха. Здесь же приведены значения α^i для моды $n = 16$ при $M_0 = 3$ (кривая 4) и $M_0 = 0,5$ (5). Обнаружено, что незначительно более устойчивыми будут колебания при сверхзвуковых скоростях.

Можно сделать вывод, что форма квазистационарных вихревых возмущений является весьма консервативной, определяемой формирующими средний профиль сдвиговыми силами при малых значениях искривления $1/R_0$, центробежными силами при малых R_0 и разным соотношением между ними при умеренных R_0 . Вихревые конфигурации для всех добавочных мод имеют более сложный вид по сравнению с решениями с ветви А. Вопрос о физической реализуемости таких решений остается открытым.

Проведенное исследование с несомненностью показывает, что в осесимметричных свободных как сверхзвуковых, так и дозвуковых струях возможно существование продольно-вихревых квазистационарных возмущений. Наличие ячеистой структуры начального участка на нерасчетных режимах истечения из сопла значительно усиливает их, что и может приводить к появлению существенной азимутальной неоднородности в распределениях средних величин, замеченной и измеренной в опытах.

б) Моделирование вязких возмущений

На рис. 4 показаны зависимости α^i (Re) для одного из типичных вариантов расчета $R_0 = 25$, $\delta = 0.15$ и $M_0 = 1.5$. Видно (на оси $\alpha^i = 0$ приведены значения критических чисел Рейнольдса Re_c), что крупномасштабные вихри (малые n) теряют устойчивость при более низких Re и существует диапазон значений Re, в котором они имеют значительно большие инкременты по сравнению с мелкомасштабными. Асимптота $\alpha^i = \text{const}$ характеризует достижение предельных α^i , когда инкременты перестают зависеть от Re (как в невязком приближении).

Для малых n это происходит достаточно быстро, но с ростом номера моды область влияния вязкости растет и, к примеру, для $n = 30$ предел соответствует достаточно высокому числу Рейнольдса $\sim 10^5$. Кажется, что этот результат можно использовать для объяснения опытных данных.

Более полная трактовка зависимостей проиллюстрирована на рис. 5. Здесь даны коэффициенты α^i для разных номеров мод n в широком диапазоне чисел Re. Штриховой линией нанесены невязкие инкременты. Из рисунка ясно при каких значениях Re можно пользоваться невязкими значениями. Таким образом, ясно выявлено, что учет вязкости приводит к уменьшению инкрементов возмущений при умеренных Re и это влияние особенно сказывается на характеристиках мелкомасштабных волн.

Встает вопрос о построении обобщенной картины, в которой можно было бы наилучшим образом представить изученные зависимости. Один из вариантов дан на рис. 6. При рассмотрении подобной неустойчивости в пограничных слоях вводится параметр или число Гертлера $G^2 = Re/R_0$, описывающее соотношение вязких и центробежных эффектов. Кривые $Re_c(G)$ для $n = \text{const}$ отделяют области устойчивости (левее и ниже линий Re_c), от областей неустойчивости — (правее и выше их).

Эти кривые, рассчитанные при малых толщинах δ для наиболее характерных значений радиусов искривления, дают опорные критические значения практически для всех возможных параметров, имеющих место в струях [6–8].

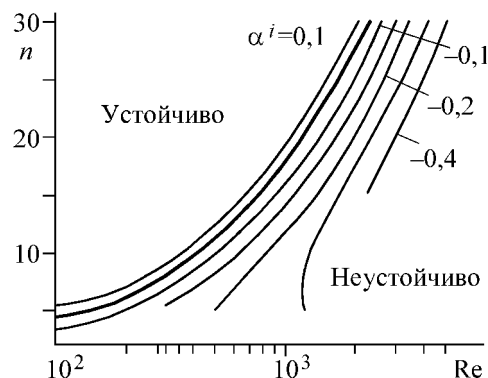


Рис. 4.

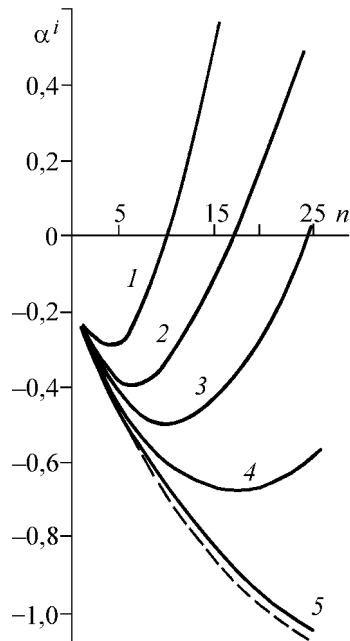


Рис. 5.

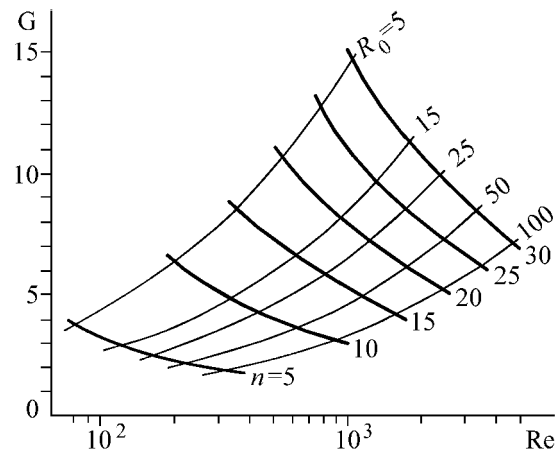


Рис. 6.

Список литературы

- [1] ЗАПРЯГАЕВ В. И., МИРОНОВ С. Г., СОЛОТЧИН А. А. Спектральный состав волновых чисел и особенности структуры течения в сверхзвуковой струе // ПМТФ. 1993. Т. 34, №5. С. 41–47.
- [2] НОВОПАШИН С. А., ПЕРЕПЕЛКИН А. Л. Самоорганизация течения в сверхзвуковой предтурбулентной струе. Новосибирск, 1988. (Препр. /ИТ СО РАН; №175–88).
- [3] KROTHOPALLI A., BUZUNA G., LOURENCO L. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet // Phys. Fluids A. 1991. Vol.3, No. 8.
- [4] WELSH F. P., CAIN T. M. Electron beam visualisation of low density nitrogen plumes // Proc. VII Symp. of the Flow Visual., Seattle. 1995. P. 192–197.
- [5] MORRIS P. J. Viscous Stability of Compressible Axisymmetric Jets // AAIA J. 1983. Vol. 21, No. 4. P. 1–2.
- [6] ЖЕЛТУХИН Н. А., ТЕРЕХОВА Н. М. Неустойчивость Тейлора-Гертлера в сверхзвуковой струе // ПМТФ. 1993. Т. 34, №5. С. 48–55.
- [7] ТЕРЕХОВА Н. М. Продольные вихри в сверхзвуковых струях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, №6. С. 759–762.
- [8] ТЕРЕХОВА Н. М. Вязкая неустойчивость Тейлора—Гертлера в сверхзвуковой осесимметричной струе // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6, №3. С. 307–319.