

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Я. Л. ГУРЬЕВА, В. П. ИЛЬИН

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия*

e-mail: yana@lapasrv.sccc.ru, ilin@comcen.nsk.su

В работе рассматривается построение аппроксимаций по методу конечных объемов с учетом известного асимптотического поведения искомого решения для двумерных сингулярно возмущенных эллиптических краевых задач. Приводятся результаты расчетов задач с различными видами сингулярности: угловые точки на границе области, смена типа граничных условий на некотором участке границы, а также особенность в окрестности точечного источника.

Введение

Решение сингулярно возмущенных краевых задач является одним из критических моментов в конечно-разностных, конечно-объемных и конечноэлементных методах. Для таких задач существует два подхода: сгущение сетки в подобластях с особенностью и модификация аппроксимаций с учетом известного асимптотического поведения искомого решения, которое представляется в аддитивной форме $u = v + w$, где v и w являются соответственно сингулярной и гладкой компонентами решения. Пример применения второго подхода рассматривается в работе [1].

Целью данной статьи является построение модифицированного метода конечных объемов (МКО) для сингулярно возмущенных краевых задач при использовании поэлементной технологии подобной широко известному подходу в методе конечных элементов, см. [2, 3].

В параграфе 1 описывается алгоритм построения модифицированных локальных матриц баланса конечнообъемных аппроксимаций. Приводятся свойства получаемой схемы и оценка погрешности аппроксимации. Параграф 2 содержит результаты численных экспериментов, проведенных при помощи модифицированной программы [4]. Рассматриваются несколько тестовых задач с различными видами сингулярности: угловые точки на границе области, смена типа граничных условий на некотором участке границы, а также особенность в окрестности точечного источника. Результаты расчетов на последовательности вложенных сгущающихся сеток демонстрируют высокую скорость сходимости сеточного решения и существенное преимущество предлагаемого подхода по сравнению с немодифицированными конечнообъемными аппроксимациями.

1. Модифицированные конечнообъемные аппроксимации

Мы приведем сначала краткое описание “немодифицированной” поэлементной технологии методов конечных объемов для двумерного случая в соответствии с работами [2–3].

В качестве примера рассмотрим решение смешанной краевой задачи для анизотропного уравнения диффузии

$$\begin{aligned} Lu \equiv -\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} x^\alpha \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y \frac{\partial u}{\partial y} + \varkappa u &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} &= g_1(x, y), \quad \gamma u + \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_2} = g_2(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ есть граница (возможно многосвязная) расчетной области Ω , которая предполагается состоящей из прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, $\alpha = 0, 1$ соответствует декартовой или цилиндрической системам координат, а $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по направлению

*Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00579, NWO № 047-008-007, а также грантом № 10 шестого Конкурса экспертизы 1999 г. научных проектов молодых ученых РАН.

© Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин, 2001.

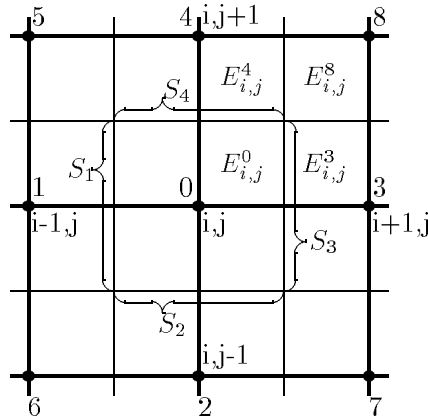


Рис. 1. Конечные объемы, конечные элементы и локальная нумерация узлов.

внешней нормали к границе области. Считается, что коэффициенты $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $\varkappa \geq 0$ являются кусочно-гладкими функциями, а решение $u(x, y)$ обладает в Ω гладкостью, достаточной для рассматриваемых ниже аппроксимаций, за исключением некоторых подобластей $\Omega_k \subset \Omega$, в которых имеет место представление

$$u(x, y) = v_k(x, y) + w_k(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_k, \tag{2}$$

где v_k есть известная сингулярная составляющая, а w_k — некоторая гладкая функция.

Пусть Ω^h есть регулярная прямоугольная сетка

$$x_{i+1} = x_i + h_x^i, \quad i = 0, 1, \dots, I, \quad y_{j+1} = y_j + h_y^j, \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

такая, что граница области, а также линии возможных разрывов коэффициентов σ_x , σ_y , \varkappa и функции f проходят по координатным линиям и $\Omega \subset [x_0, x_{I+1}] \times [y_0, y_{J+1}]$. Более конкретно, под Ω^h понимается совокупность расчетных узлов сетки, имеющих координаты $(x_i, y_j) \in \Omega \cup \Gamma_2$, т.е. не содержащая внешние к Ω узлы, в том числе лежащие на границе Γ_1 с крайевыми условиями 1-го рода (Дирихле). Обозначим через $V_{i,j}$ “малый” конечный объем, или ячейку Дирихле-Вороноя, для (i, j) -го узла:

$$V_{i,j} = \{x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}, \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}\}, \quad x_{i\pm 1/2} = (x_i + x_{i\pm 1})/2, \quad y_{j\pm 1/2} = (y_j + y_{j\pm 1})/2,$$

а через $\bar{V}_{i,j}$ — “большой” объем:

$$\bar{V}_{i,j} = \{x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad y_{j-1} < y < y_{j+1}\}.$$

Пусть также

$$S_{i,j} = \bigcup_{p=1}^4 S_{i,j}^{(p)}, \quad \bar{S}_{i,j} = \bigcup_{p=1}^4 \bar{S}_{i,j}^{(p)}$$

означают границы соответствующих объемов, а $S_{i,j}^{(p)}$, $\bar{S}_{i,j}^{(p)}$ суть части этих границ, пронумерованные в соответствии с рис. 1.

Следуя [2-4], рассмотрим параметризованный метод конечных объемов на основе следующего из (1) балансного соотношения

$$\begin{aligned} & \omega \left(- \int_{S_{i,j}^{(2)}} x^\alpha \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{S_{i,j}^{(3)}} x^\alpha \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{S_{i,j}^{(3)}} x^\alpha \sigma_y \frac{\partial u}{\partial y} dx + \int_{S_{i,j}^{(4)}} x^\alpha \sigma_y \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) + \\ & + (1 - \omega) \left(- \int_{\bar{S}_{i,j}^{(1)}} x^\alpha \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_{\bar{S}_{i,j}^{(2)}} x^\alpha \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{\bar{S}_{i,j}^{(3)}} x^\alpha \sigma_y \frac{\partial u}{\partial y} + \int_{\bar{S}_{i,j}^{(4)}} x^\alpha \sigma_y \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = \\ & = \omega \int_{V_{i,j}} (f - \varkappa u) x^\alpha dx dy + (1 - \omega) \int_{\bar{V}_{i,j}} (f - \varkappa u) x^\alpha dx dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Аппроксимируя здесь производные, поверхностные и объемные интегралы, приходим к системе сеточных девятиточечных уравнений

$$(A^h u^h)_{i,j} = p_{i,j}^{(0)} u_0 - \sum_{k=1}^8 p_{i,j}^{(k)} u_k = f_{i,j}^h, \tag{4}$$

где для краткости используется указанная на рис. 1 локальная нумерация узлов.

Аналогично тому, как это сделано в [2, 3] для изотропного случая ($\sigma_x = \sigma_y$), можно показать, что при постоянных коэффициентах $\sigma_x, \sigma_y, \varkappa$ и $\omega = 8/9$ получаемая система уравнений МКО совпадает (с точностью до нормировки) на равномерной сетке с компактной разностной схемой, имеющей погрешность $O(h^4)$:

$$\left(\sigma_x A_x^h + \sigma_y A_y^h - \frac{\sigma_x h_x^2 + \sigma_y h_y^2}{12} A_x^h A_y^h \right) u^h = f^h - \left(\frac{\sigma_x h_x^2}{12} A_x^h + \frac{\sigma_y h_y^2}{12} A_y^h \right) (f^h - \varkappa u^h),$$

где A_x^h, A_y^h — одномерные разностные операторы. В общем случае переменных коэффициентов и неравномерной сетки ошибка аппроксимации имеет первый порядок, причем сама алгебраическая система (4) может быть упрощена до пятиточечной. Именно на этом простейшем случае мы и остановимся подробнее.

Вычисление коэффициентов системы (4) наиболее эффективно реализуется поэлементным образом. Одновременно с разбиением расчетной области на ячейки Дирихле–Вороного рассматриваются двойственные им сеточные элементы $E_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Опуская для краткости индексы i, j , обозначим через $\Gamma_{0,3}, \Gamma_{3,8}, \Gamma_{4,8}, \Gamma_{0,4}$, те участки границ ячеек Дирихле–Вороного, которые находятся в $E_{i,j}$ и являющиеся общими границами подэлементов с соответствующими номерами $E_{i,j}^m, m = 0, 3, 4, 8$, см. рис. 1. Пусть

$$I_0 = I_{0,3} + I_{0,4}, \quad I_3 = I_{3,0} + I_{3,8}, \quad I_4 = I_{4,0} + I_{4,8}, \quad I_8 = I_{8,3} + I_{8,4}$$

означают потоки через соответствующие отрезки $\Gamma_{k,l}$ и через

$$\Gamma_0 = \Gamma_{0,3} \cup \Gamma_{0,4}, \quad \Gamma_3 = \Gamma_{0,3} \cup \Gamma_{3,8}, \quad \Gamma_4 = \Gamma_{0,4} \cup \Gamma_{4,8}, \quad \Gamma_8 = \Gamma_{4,8} \cup \Gamma_{3,8}.$$

Поскольку после аппроксимации потоков их приближенные значения I_m^h представляются линейными формами от $u_m, m = 0, 3, 4, 8$, то после введения векторов четвертого порядка $\bar{I}^h = \{I_m^h\}, \bar{u} = \{u_m\}$ связь между ними устанавливается в виде

$$\bar{I}^h = B^{(i,j)} \bar{u}, \tag{5}$$

где $B^{(i,j)} = \{b_{k,l}^{(i,j)}\}$ есть локальная симметричная матрица баланса потоков (аналог матрицы жесткости в МКЭ). При $\omega = 1$ и простейших аппроксимациях поверхностных интегралов ее элементы выражаются формулами

$$\begin{aligned} b_{0,3}^{(i,j)} &= \frac{x_{i+1/2}^\alpha \sigma_{i+1/2,j+1/4}^x h_j^y}{2h_i^x}, & b_{0,4}^{(i,j)} &= \frac{x_{i+1/4}^\alpha \sigma_{i+1/4,j+1/2}^y h_i^x}{2h_j^y}, \\ b_{3,8}^{(i,j)} &= \frac{x_{i+3/4}^\alpha \sigma_{i+3/4,j+1/2}^y h_i^x}{2h_j^y}, & b_{4,8}^{(i,j)} &= \frac{x_{i+1/2}^\alpha \sigma_{i+1/2,j+3/4}^x h_j^y}{2h_i^x}, \\ b_{0,0}^{(i,j)} &= b_{0,3}^{(i,j)} + b_{0,4}^{(i,j)}, & b_{3,3}^{(i,j)} &= b_{0,3}^{(i,j)} + b_{3,8}^{(i,j)}, \\ b_{4,4}^{(i,j)} &= b_{0,4}^{(i,j)} + b_{4,8}^{(i,j)}, & b_{8,8}^{(i,j)} &= b_{3,8}^{(i,j)} + b_{4,8}^{(i,j)}. \end{aligned}$$

Так как член $\varkappa u$ в уравнении (1) имеет физический смысл источника субстанции, то соответствующую аппроксимацию частей объемных интегралов

$$J_m^{(u)} = \int_{E_{i,j}^{(m)}} x^\alpha \varkappa u \, dx \, dy \tag{6}$$

можно формально описать в аналогичной (5) алгебраической форме

$$\bar{J}^{(h)} = S^{(i,j)} \bar{u},$$

где $\bar{J}^{(h)} = \{J_m^h\}, S^{(i,j)}$ — локальные вектор и матрица источников (аналог матрицы масс в МКЭ). Для обеспечения абсолютной монотонности (при любых шагах сетки) итоговой алгебраической системы матрица $S^{(i,j)} = \{s_m^{(i,j)}\}$ определяется диагональной, т. е.

$$s_m^{(i,j)} = h_i^x h_j^y (x^\alpha \varkappa)_m / 4, \quad J_m^h(u) = s_m^{(i,j)} u_m, \tag{7}$$

где значения функции в скобках берутся в центрах соответствующих подэлементов $E_{i,j}^{(m)}$. Полная локальная матрица баланса определяется как сумма

$$A_h^{(i,j)} = \{a_{k,l}^{(i,j)}\} = B^{(i,j)} + S^{(i,j)}.$$

Аналогично вычислению элементов матрицы источников определяется и локальный вектор правых частей

$$\bar{f}_{i,j}^h = \{f_m^{(i,j)}\}, \quad f_m^{i,j} = h_i^x h_j^y (x^\alpha f)_m / 4.$$

Если некоторые из сторон элемента $E_{i,j}$ являются граничными с заданными краевыми условиями 2-го или 3-го рода, то элементы локальной матрицы и вектора модифицируются путем учета соответствующих аппроксимаций поверхностных интегралов, см. [2, 3].

Все элементы глобальной (пятидиагональной в рассматриваемом случае) матрицы A^h и правой части из (4) определяются суммированием соответствующих величин локального уровня, вычисляемых в последовательной (или параллельной — при реализации на многопроцессорной вычислительной системе) поэлементной технологии:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(0)} &= a_{0,0}^{(i,j)} + a_{3,3}^{(i-1,j)} + a_{4,4}^{(i,j-1)} + a_{8,8}^{(i-1,j-1)}, \\ p_{i,j}^{(3)} &= a_{0,3}^{(i,j)} + a_{4,8}^{(i,j-1)} = p_{i+1,j}^{(1)}, \quad p_{i,j}^{(4)} = a_{0,4}^{(i,j)} + a_{3,8}^{(i-1,j)} = p_{i,j+1}^{(2)}, \\ f_{i,j}^h &= f_0^{(i,j)} + f_3^{(i-1,j)} + f_4^{(i,j-1)} + f_8^{(i-1,j-1)}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к рассмотрению модификации описанных аппроксимаций в окрестностях сингулярных точек, для которых известны асимптотические представления решения вида (2).

Предлагаемый алгоритм изложим на примере аппроксимации потока

$$I_{0,3}(u) = \int_{y_j}^{y_{j+1/2}} x_{i+1/2}^\alpha \sigma_{i+1/2}^x \frac{\partial u}{\partial x} dy = I_{0,3}^h(u) + \psi_{0,3}(u), \quad I_{0,3}^h(u) = b_{0,3}^{(i,j)}(u_0 - u_3), \quad (8)$$

где $\psi_{0,3}(u)$ есть величина порядка $O(h^2)$, $h = \max\{h_i^x, h_j^y\}$, если решение u имеет ограниченные производные второго порядка. В соответствии с аддитивным представлением решения (2) в окрестности Ω_k можно записать

$$I_{0,3}(u) = I_{0,3}(v_k) + I_{0,3}(w_k) = I_{0,3}^h(v_k) + I_{0,3}^h(w_k) + \psi_{0,3}(v_k) + \psi_{0,3}(w_k). \quad (9)$$

Предполагая $I_{0,3}^h(v_k) \neq 0$, для аппроксимации $I_{0,3}(u)$ вместо $I_{0,3}^h(u)$ используем выражение

$$\tilde{I}_{0,3}^h(u) = I_{0,3}^h(u) I_{0,3}(v_k) / I_{0,3}^h(v_k) = I_{0,3}^h(u) \gamma_{0,3}(v_k), \quad (10)$$

которое в силу (8), (9) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{0,3}^h(u) &= (I_{0,3}^h(v_k) + I_{0,3}^h(w_k))(1 + \psi_{0,3}(w_k) / I_{0,3}^h(v_k)) \\ &= I_{0,3}^h(v_k) + I_{0,3}^h(w_k) + \psi_{0,3}(v_k) + \psi_{0,3}(w_k) I_{0,3}^h(w_k) / I_{0,3}^h(v_k) \\ &= I_{0,3}(u) - \psi_{0,3}(w_k) + \psi_{0,3}(v_k) I_{0,3}^h(w_k) / I_{0,3}^h(v_k). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно,

$$I_{0,3}(u) = \tilde{I}_{0,3}^h(u) + \psi_{0,3}(w_k) - \psi_{0,3}(v_k) I_{0,3}^h(w_k) / I_{0,3}^h(v_k) = \tilde{I}_{0,3}^h(u) + \tilde{\psi}_{0,3}. \quad (12)$$

Сравнение погрешностей $\psi_{0,3}(u)$ и $\tilde{\psi}_{0,3}$ из (8) и (12) позволяет сделать вывод, что модифицированная аппроксимация потока $\tilde{I}_{0,3}^h$ имеет повышенную точность в сравнении с $I_{0,3}^h$, если в Ω_k “гладкие” составляющие ошибки аппроксимации и дискретного выражения потока $I_{0,3}^h(w_k)$ меньше соответствующих величин на сингулярной части решения, т. е.

$$|\psi_{0,3}(w_k)| \leq \alpha |\psi_{0,3}(v_k)|, \quad |I_{0,3}^h(w_k)| \leq \beta |I_{0,3}^h(v_k)|, \quad \alpha, \beta < 1. \quad (13)$$

Использование модифицированных аппроксимаций потоков $\tilde{I}_{k,l}^h$ вместо $I_{k,l}^h$ (по аналогии с (10) можно записать $\tilde{I}_{k,l}^h = I_{k,l}^h \gamma_{k,l}$) приводит к соответствующей модификации локальной матрицы потоков, при этом вместо $B^{(i,j)}$ получаем матрицу

$$\tilde{B}^{(i,j)} = \{\tilde{b}_{k,l}^{(i,j)} = b_{k,l}^{(i,j)} \gamma_{k,l}\}.$$

Отметим еще одно условие применимости данной модифицированной аппроксимации: значения $I_{0,3}(v_k)$ и $I_{0,3}^h(v_k)$ в (9) должны быть одного знака. В противном случае глобальная матрица уравнений (4) не будет матрицей положительного типа, что значительно усложняет и теоретическое обоснование схемы, и методы решения алгебраической системы.

Аналогично проводится и модификация локальной матрицы источников $S^{(i,j)}$. В соответствии с обозначениями в (7) величины ее элементов $s_m^{(i,j)}$ заменяются на

$$\tilde{s}_m^{(i,j)} = s_m^{(i,j)} J_m(v_k) / J_m^h(v_k) = s_m^{(i,j)} \gamma_m.$$

Если обозначить через

$$\psi_m^{(i,j)}(u) = J_m(u) - J_m^h(u) = \psi_m^{(i,j)}(v_k) + \psi_m^{(i,j)}(w_k)$$

погрешность аппроксимации объемного интеграла из (6), то модифицированная ошибка определяется аналогично (12):

$$\tilde{\psi}_m^{(i,j)}(u) = J_m(u) - \tilde{J}_m^h(u) = \psi_m(w_k) - \psi_m(v_k) J_m^h(w_k) / J_m^h(v_k).$$

Отсюда следует, что повышение точности модифицированной аппроксимации объемных интегралов будет иметь место при выполнении аналогичных (13) условий

$$|\psi_m(w_k)| \leq \alpha_m |\psi_m(v_k)|, \quad |J_m^h(w_k)| \leq \beta_m |J_m^h(v_k)|, \quad \alpha_m, \beta_m < 1. \quad (14)$$

В результате рассмотренных аппроксимаций получаем модифицированные локальную и глобальную матрицы баланса

$$\tilde{A}_h^{(i,j)} = \tilde{B}^{(i,j)} + \tilde{S}^{(i,j)}, \quad \tilde{A}_h \tilde{u}^h = f^h. \quad (15)$$

Полная погрешность аппроксимации модифицированной системы сеточных уравнений (15) складывается из ошибок аппроксимаций всех участвующих в (3) поверхностных и объемных интегралов. При этом необходимо отметить, что при суммировании поверхностных интегралов в уравнении для (i, j) -го узла главные члены погрешностей будут аннулироваться, как и в немодифицированных схемах конечных объемов, см. [2, 3].

Получаемая система алгебраических уравнений является стилтесовой, и ошибка приближенного решения может быть оценена стандартным образом в сеточных равномерной или евклидовой нормах. Конкретные результаты будут зависеть от свойств выделяемых сингулярных и гладких составляющих решения, а также от выбора окрестностей Ω_k , в которых применяется модифицированная аппроксимация.

2. Примеры решения модельных задач

Мы рассмотрим три типа задач с разными асимптотическими представлениями решения в окрестности сингулярных точек.

Все расчеты проводились с помощью модификации программы, описанной в [2] и реализующей решение системы алгебраических уравнений с помощью неявного метода неполной факторизации с ускорением сопряженными градиентами, обеспечивающего уменьшение нормы начальной невязки в заданное число ε^{-1} раз (величина ε бралась заведомо намного меньшей ошибки сеточного решения, например, $\varepsilon < 10^{-8}$).

А. Первая задача заключается в расчете нулевой и первой гармоник поля дипольного источника, описываемых уравнением

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m^2}{r^2} u = 0, \quad 0 < a < r, z < 1,$$

при $m = 0, 1$. Соответствующие решения описываются формулами

$$u_0(r, z) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad u_1(r, z) = \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (16)$$

Краевые задачи решались с граничными условиями первого рода, соответствующим точным решениям (16).

Для $m = 0$ все поверхностные и объемные интегралы вычисляются точно, а поскольку в (2) можно положить $u = v$, т.е. дополнительная гладкая составляющая w равна нулю, то ожидаемый результат

является на первый взгляд парадоксальным: на сетке с любым количеством узлов $I, J > 1$ модифицированное сеточное решение должно иметь нулевую ошибку! В проведенных экспериментах для разных a данный факт действительно подтвердился (численная погрешность для всех значений a и h оказывается порядка итерационной ошибки ε), в то время как для немодифицированной схемы на последовательности квадратных сетках с уменьшающимися шагами h погрешность оказалась порядка $O(h^2)$.

Для случая $m = 1$ первые производные решения

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{z^2 - 2r^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{3rz}{(r^2 + z^2)^{5/2}}$$

равны нулю на прямых $z^2 = 2r^2$ и $r = 0, z = 0$ соответственно. Поэтому, во избежание потери свойства стилизованности матрицы, при вычислении компонент потоков $I_{k,l}^h$, вычисляемых интегрированием по отрезкам, которые пересекаются указанными прямыми, модификация аппроксимации не делалась (например, в (10) $\gamma_{0,3} = 1$ и $\tilde{I}_{0,3}^h = I_{0,3}^h$). Число получаемых “немодифицируемых или частично модифицированных” сеточных уравнений равно $O(h^{-1})$.

В табл. 1 приведены значения максимальных погрешностей

$$\delta = \max_{i,j} \{|v_{i,j} - u(r_i, z_j)|\}$$

численных решений для нулевой и первой гармоник при различных значениях $a = 0.025, 0.05, 0.1$, соответствующих разным степеням гладкости искомых функций. Расчеты проводились на трех квадратных сетках с последовательно уменьшающимися вдвое шагами $h = 0.0125, 0.00625, 0.003125$ (для $a = 0.05$, например, соответствующие количества шагов сеток равны $76 \times 76, 152 \times 152, 304 \times 304$). В каждой клетке таблицы верхнее число означает ошибку сеточного решения без выделения сингулярности, а нижнее — с учетом описанной модификации сеточных коэффициентов. Знак ε означает, что соответствующая ошибка примерно равна точности итерационного решения.

Т а б л и ц а 1

Ошибки сеточных решений u_0, u_1 без учета и с учетом особенностей

$h \setminus a$	$m = 0$			$m = 1$		
	0.025	0.05	0.1	0.025	0.05	0.1
0.0125	$3.48 \cdot 10^{-2}$	$4.57 \cdot 10^{-3}$	$5.80 \cdot 10^{-4}$	1.50	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$7.34 \cdot 10^{-3}$
	ε	ε	ε	$2.19 \cdot 10^{-1}$	$3.73 \cdot 10^{-2}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$
0.00625	$9.15 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$4.52 \cdot 10^{-1}$	$2.94 \cdot 10^{-2}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$
	ε	ε	ε	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$9.50 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$
0.003125	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$2.93 \cdot 10^{-4}$	$3.66 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$7.46 \cdot 10^{-3}$	$4.67 \cdot 10^{-4}$
	ε	ε	ε	$3.80 \cdot 10^{-2}$	$6.34 \cdot 10^{-3}$	$4.56 \cdot 10^{-4}$

Как видно из приведенных результатов для $m = 1$, немодифицированная аппроксимация для всех рассмотренных имеет ошибку примерно $O(h^2)$. Модифицированная схема имеет приблизительно тот же порядок сходимости, но ее погрешность всегда меньше, причем преимущество усиливается именно там, где у немодифицированной схемы погрешность увеличивается, т.е. при относительно малых a и больших h .

Б. Вторая модельная задача состоит в решении уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат ($\sigma_x = \sigma_y = \alpha = 1, \varphi = 0$ в (1)) в прямоугольной области $\Omega = \{r_a < r < R, -H < z < H\}$ с различными типами краевых условий на левой стороне:

$$u(r_a, z) = 1, \quad -z_a < r < z_a, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad z \in (H, -z_a) \cup (z_a, H), \quad z_a < H.$$

В окрестности точек $(r_a, -z_a), (r_a, z_a)$ смены условий Дирихле и Неймана решение данной задачи имеет сингулярную часть вида [5]

$$v(r, z) = [(r - r_a)^2 + (z - z_a)^2]^{1/4} \sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \arctg \frac{z \pm z_a}{r - r_a} \right), \quad (17)$$

где знаки “+” и “-” соответствуют верхней и нижней частям расчетной области, см. рис. 2. На остальных трех сторонах расчетного прямоугольника ставились граничные условия первого рода в соответствии с формулой (17).

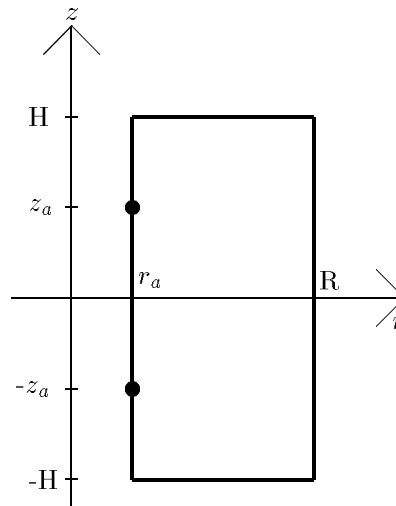


Рис. 2. Расчетная область для задачи Б.

Расчеты проводились для значений $r_a = 0.1, z_a = 0.5, R = 1.1, H = 3$ на квадратных сетках с числом шагов $L \times 2L$ при $L = 20, 40, 80, 160, 320$. Выделение особенностей производилось только в кругах с центрами в особых точках $(r_a, \pm z_a)$ и радиусами $\rho = 0.1 \cdot \theta$ при $\theta = 2, 1, 0.5, 0$, причем случай $\theta = 0$ соответствует расчетам без выделения особенностей. Так как аналитическое решение данной краевой задачи отсутствует, то сравнение погрешностей результатов проводилось в сопоставлении с “точным численным” решением на густой сетке 320×640 , когда дальнейшее увеличение числа узлов не меняет пять первых значащих цифр.

В табл. 2 приводятся абсолютные значения погрешностей для одной из характерных точек $r = 0.2, z = -0.5$ для разных сеток и значений θ (расчеты проводились с итерационной точностью $\varepsilon = 10^{-12}$).

Т а б л и ц а 2

Ошибки решений для задачи Б

$\theta \setminus L$	20	40	80	160	320
0	0.01857	0.00887	0.00428	0.00208	0.00102
0.5	0.00312	0.00093	0.00024	0.00006	0.00001
1	0.00296	0.00084	0.00022	0.00005	0
2	0.00218	0.00063	0.00017	0.00004	0

Как видно, ошибка сеточного решения без выделения особенностей ($\theta = 0$) есть величина первого порядка по h , а с выделением особенностей имеет второй порядок, причем величина погрешности слабо зависит от изменения значения параметра θ . В частности, при $\theta = 2$ ошибка на сетке 40×80 меньше, чем на сетке 320×640 при расчете без выделения особенностей.

В. Третья модельная задача – решение уравнения Лапласа в декартовой системе координат ($\sigma_x = \sigma_y = 1, \alpha = 0, \varepsilon = 0$ в (1)) в L -образной области $\Omega = \{0 < x < 0.5, 0 < y < 1\} \cup \{0.5 < x < 1, 0 < y < 0.5\}$ с краевым условием Дирихле на всех шести сторонах, заданным в виде функции, представляющей точное (сингулярное) решение данной задачи [5]:

$$v(x, y) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/3} \sin \varphi,$$

где $x_0 = 0.5, y_0 = 0.5$, а угол φ принимает следующие значения в разных частях расчетной области:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{2}{3} \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0}, & x \leq x_0, y > y_0, \\ \pi/3, & x < x_0, y = y_0, \\ \pi, & x > x_0, y = y_0, \\ \frac{2}{3} \pi - \frac{2}{3} \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0}, & y < y_0. \end{cases}$$

В табл. 3 приведены значения максимальных погрешностей

$$\delta = \max_{i,j} \{|u_{i,j} - v(x_i, y_j)|\}$$

численных решений. Расчеты проводились на пяти квадратных сетках с последовательно уменьшающимися вдвое шагами, начиная с $N = 16$ шагов по каждому направлению для самой редкой сетки. Как и в предыдущем примере, выделение особенности проводилось только в круге с центром в особой точке $(0.5, 0.5)$ и радиусом $\rho = 0.1 \cdot \theta$ при $\theta = 0, 0.5, 1, 1.5$. Случай $\theta = 0$ соответствует расчету без выделения особенностей.

Т а б л и ц а 3

Ошибки решений для задачи В

$N \setminus \theta$	0	0.05	1	1.5
16	0.013	0.0016	0.00087	0.00089
32	0.0082	0.00061	0.00038	0.00020
64	0.0052	0.00025	0.00014	$7.12 \cdot 10^{-5}$
128	0.0033	$8.97 \cdot 10^{-5}$	$3.45 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$
256	0.0021	$2.26 \cdot 10^{-5}$	$9.19 \cdot 10^{-6}$	$5.26 \cdot 10^{-6}$

Из данных таблицы следует, что расчет без учета особенности решения имеет большую ошибку сеточного решения даже хуже первого порядка по h , в 10 и более раз превышающую ошибку при расчете на той же сетке, но с учетом особенности. При учете особенности для всех радиусов θ ошибка численного решения имеет второй порядок (при увеличении количества шагов по каждому направлению вдвое ошибка уменьшается даже больше, чем в четыре раза). Ошибка численного решения уменьшается также с ростом радиуса окрестности, в которой проводится учет особенности.

Список литературы

- [1] Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985.
- [2] Гурьева Я. Л., Ильин В. П. Вычислительные аспекты метода конечных объемов. ЖВММФ. 1998. Т. 38, № 11, С. 1860–1876.
- [3] Ильин В. П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск, Изд. ИМ СО РАН, 2000.
- [4] GURIEVA Y.L., IL'IN V.P. Finite volume approaches for 2-D BVPs: algorithms, data structures, software and experiments. Report № 9715, University of Nijmegen, The Netherlands, 1997.
- [5] Оганесян Л. А., Ривкин В. Я., Руховец Л. А. Дифференциальные уравнения и их применение. Вильнюс, Институт физики и математики АН Лит. ССР, 1974.