УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ В СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ

И. Б. Палымский
Новосибирский военный институт, Россия
e-mail: nina@ns.kinetics.nsc.ru

We explored different steady regimes of a Rayleigh — Benard convection. Parameter is spotted, his behaviour reflects stability, fracture and bifurcations of the solutions.

Исследование устойчивости двумерных стационарных решений сопряжено с большими вычислительными трудностями. Во всех известных автору работах исследователи ограничивались рассмотрением устойчивости нулевого (равновесного) или одномерного решений, типа течения в вертикальном канале [1, 2, 3].

Целью работы является исследование методом Галеркина устойчивости двумерных стационарных режимов конвекции.

Рассматриваются стационарные конвективные течения вязкой, несжимаемой жидкости в прямоугольной области при подогреве снизу. Горизонтальные границы области предполагаются изотермическими и свободными от касательных напряжений, а на вертикальных границах задан линейный профиль температуры и "мягкие" граничные условия для завихренности ω и функции тока φ.

Записанная в отклонениях от равновесного решения, после обезразмеривания исходная система уравнений имеет вид [4, 5]:

$$\omega_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y\omega_x - \varphi_x\omega_y) = \triangle\omega + \mathrm{Ra}Q_x,$$
$$\triangle\varphi = -\omega, \qquad (1)$$
$$Q_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \triangle Q - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_x,$$

где φ — функция тока, ω — вихрь, Q — отклонение температуры от равновесного профиля (ная температура равна $1 - y + Q$), $\triangle f = f_{xx} + f_{yy}$ — оператор Лапласа, $\mathrm{Ra} = \dfrac{g\beta H^3 dQ}{\chi\nu}$ — число Рэлея, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\chi}$ — число Прандтля, g — ускорение силы тяжести, β, ν, χ — коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно, H — толщина слоя и dQ — разность температур на горизонтальных границах.

Система (1) решается в области $\Pi = \{(x, y)|0 \le x \le l, 0 \le y \le 1\}$ с граничными условиями $\varphi = \omega = Q = 0$ при $y = 0, 1$; $0 \le x \le l$ (на горизонтальных границах) и $\varphi_x = \omega_x = Q = 0$ при $x = 0, l; 0 \le y \le 1$ (на вертикальных границах).

Для бесконечномалых отклонений от стационарного решения системы (1) можно получить:

$$\omega_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_{0y}\omega_x + \varphi_y\omega_{0x} - \varphi_{0x}\omega_y - \varphi_x\omega_{0y}) = \triangle\omega + \mathrm{Ra}Q_x,$$
$$\triangle\varphi = -\omega, \qquad (2)$$
$$Q_t + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\varphi_{0y}Q_x + \varphi_y Q_{0x} - \varphi_{0x}Q_y - \varphi_x Q_{0y}) = \frac{1}{\mathrm{Pr}} \triangle Q - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\varphi_x,$$

здесь φ, ω, Q — бесконечномалые отклонения от стационарного решения φ_0, ω_0, Q_0.

Стационарные решения системы (1) рассчитываются спектрально-разностным методом [5] и поэтому они представлены в виде:

$$\omega_0(x, y) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}\rho_k \cos(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$

$$\varphi_0(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=1}^{M-1}\frac{\omega_{km}}{\alpha^2k^2+\pi^2m^2}\rho_k\cos(\alpha kx)\sin(\pi my),$$

$$Q_0(x,y)=\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{M-1}Q_{km}\sin(\alpha kx)\sin(\pi my),$$

где $\alpha=\dfrac{\pi}{l}$ — волновое число, а $\rho_k=\{0.5\ (\text{при } k=0,N)\ \ 1\ (\text{при } 1\le k\le N-1)\}$. Всегда полагалось $\alpha=1$ и $\Pr=2$.

Для уменьшения количества используемых гармоник отбрасывались гармоники амплитуда которых не превосходила 5 % от максимальной. Как правило, для представления завихренности (функции тока) использовалось до 10 гармоник, а для температуры — до 40.

Данная физическая задача характеризуется большим разнообразием стационарных решений, все они связаны с различного рода симметрией. При надкритичности $r=5$, $r=\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_{cr}$, $\mathrm{Ra}_{cr}=657.5$ спектрально-разностным методом [5] можно получить четыре стационарных решения: пятивихревой (рис. 1) и трехвихревой (рис. 2) — с вращательной симметрией относительно точки (l/2,0.5), четырехвихревой (рис. 3) и двухвихревой (рис. 4) — с симметрией относительно вертикальной линии $x=l/2$.

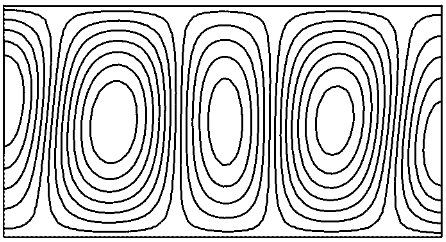

Рис.1

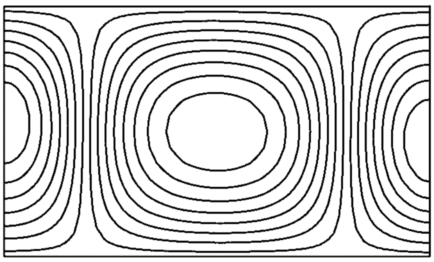

Рис.2

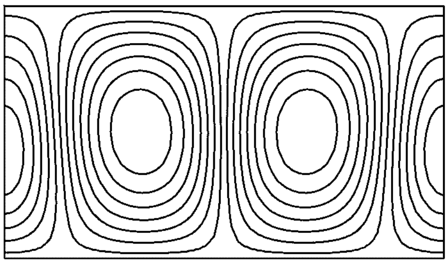

Рис.3

На рис. 1–4 показана функция тока при $r=5$ и $\Pr=2$. Пятивихревой стационарный режим устойчив только при небольших надкритичностях (до $r=42$), а трехвихревой и четырехвихревой стационарные решения устойчивы до $r\approx 400$, где от них мягко ответвляются устойчивые периодические решения (бифуркация Хопфа). В искаженном виде трехвихревой и четырехвихревой режимы можно увидеть даже при возникновении стохастической конвекции при $r\approx 1000$ [6, 7]. Систематичные расчеты двухвихревого стационарного режима при умеренных и больших надкритичностях не проводились из-за нефизичности

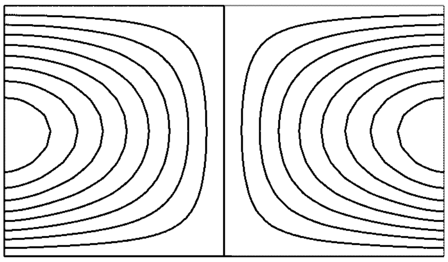

Рис.4

данного стационарного решения и вычислительных трудностей, обусловленных наличием теплового пограничного слоя у нижней границы.

Приближенные решения системы уравнений для возмущений (2) разыскиваются в виде:

$$\omega(t,x,y) = a\exp(-\lambda t)\cos(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$
$$\varphi(t,x,y) = \frac{a}{S}\exp(-\lambda t)\cos(\alpha k x)\sin(\pi m y), \tag{3}$$
$$Q(t,x,y) = b\exp(-\lambda t)\sin(\alpha k x)\sin(\pi m y),$$

где a и b — постоянные амплитуды, а $S = \alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2$.

После подстановки в первое и третье уравнения системы (2) решений (3) (второе уравнение системы (2) выполнено автоматически выбором вида решения), умножения первого уравнения на $\cos(\alpha k x)\sin(\pi m y)$, третьего на $\sin(\alpha k x)\sin(\pi m y)$ и интегрирования по всей области, получим два линейных уравнения для неизвестных амплитуд a и b. Как условие существования решений этой системы уравнений получаем вековое уравнение для λ.

Все выкладки проводились с помощью программы Maple V Release 5, в частности, подстановка решений (3) в систему (2), аналитическое вычисление необходимых интегралов и вывод двух уравнений для амплитуд a и b, затем вывод векового уравнения для λ и его решение.

Методическими расчетами установлено, что неустойчивость стационарных режимов связана с первой модой, поэтому всегда полагалось $m = 1$. Введем параметр

$$en = 0.5\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k - |\lambda_k|), \tag{4}$$

здесь суммирование производится по всем нарастающим гармоникам. Введенный таким образом параметр en аналогичен хорошо известной в теории динамических систем энтропии Колмогорова [8], которая является мерой неопределенности или мерой хаоса. Параметр en характеризует устойчивость стационарного решения.

Опишем результаты исследования устойчивости стационарных решений.

На рис. 5 представлена зависимость en от надкритичности r для пятивихревого режима, знаком • показаны расчетные значения. Можно выделить три области: 1 — область устойчивости пятивихревого режима стационарной конвекции ($r \le 25$), 2 — область разрушения ($25 \le r \le 42$) и 3 — трехвихревой режим ($42 \le r$). Видно, что разрушение пятивихревого режима сопровождается уменьшением (ростом неустойчивости) параметра en.

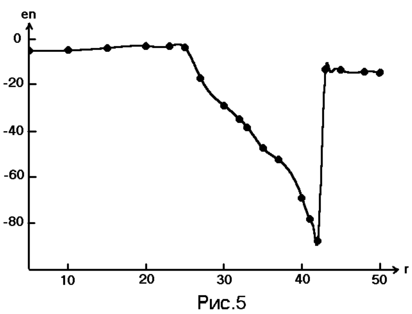

Рис.5

На рис. 6 изображена зависимость параметра en от надкритичности для трехвихревого режима конвекции, точки — расчетные значения. При $r = 428$ мягко ответвляется устойчивый периодический режим.

При $r \geq 428$ исследуется на устойчивость не стационарное решение (оно неустойчиво), а осредненное по времени. При $r = 500$ происходит жесткое ответвление нового периодического режима. Вблизи точки бифуркации этот периодический режим метастабилен, что мы отождествляем с его неустойчивостью.

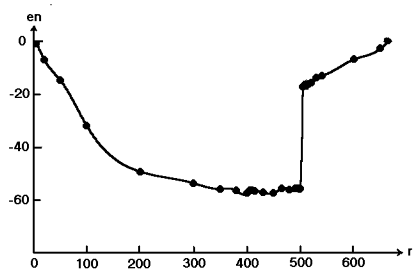

Рис.6

На рис. 7 показан размах колебаний числа Нуссельта Nu:

$$\mathrm{Nu} = (\mathrm{Nu}_0 + \mathrm{Nu}_1)/2, \quad \mathrm{Nu}_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} Q_y(t,x,0)dx - 1, \quad \mathrm{Nu}_1 = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} Q_y(t,x,1)dx - 1,$$

для этих двух периодических режимов как функция надкритичности. Знаком $\bullet$ показаны устойчивые решения, а x — метастабильные. Таким образом, скачкообразный рост параметра en (рис. 6, $r = 500$) связан с жестким рождением нового неустойчивого периодического решения.

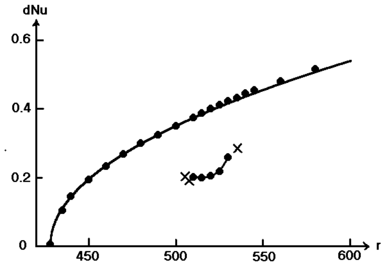

Рис.7

На рис. 8 изображена величина параметра en как функция надкритичности для четырехвихревого режима, знаки — расчетные значения. Видны разрывы при $r = 20$, 28 и 32. Предположительно, по аналогии с трехвихревым режимом, это связано с жестким рождением новых неустойчивых решений.

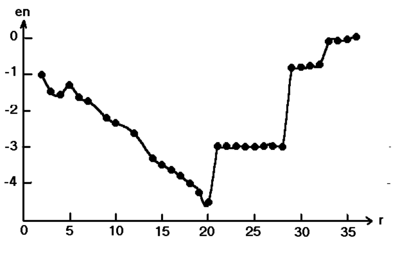

Рис.8

Интересен вопрос о влиянии числа Прандтля на устойчивость стационарных режимов. Для ответа на него, взяв за основу стационарное решение при $r = 20$ и $\mathrm{Pr} = 2$, вычислим λ как функцию Pr.

На рис. 9 схематично изображены функции $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ для пятивихревого, четырехвихревого и трехвихревого режимов.

Кривые с аномальным поведением вблизи $\mathrm{Pr} = 0$ (кривые *1* и *2* на рис. 9) типичны для пятивихревого и четырехвихревого режимов. Особенность при $\mathrm{Pr} = 0$ обусловлена наличием отрицательных степеней в разложениях функции $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ при $\mathrm{Pr} = 0$ в степенной ряд по Pr. Для трехвихревого режима разложения $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ по Pr при $\mathrm{Pr} = 0$ не содержат отрицательных степеней (кривые *3* и *4* на рис. 9). Наличие особенности при $\mathrm{Pr} = 0$ позволяет предположить, что пятивихревой и четырехвихревой режимы не могут быть продолжены в область малых значений Pr, а трехвихревой режим может быть продолжен в область

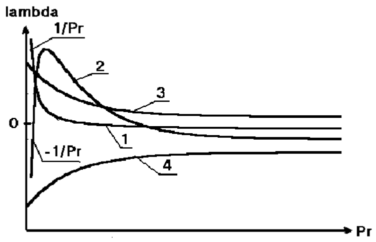

Рис.9

малых значений Pr. Результаты численных расчетов стационарных решений системы (1) подтвердили это вывод. По непрерывности четырехвихревой режим был продолжен до $\mathrm{Pr} = 0.8$, пятивихревой — до $\mathrm{Pr} = 0.435$, а трехвихревой режим без существенных трудностей — до $\mathrm{Pr} = 0.004$.

Основные выводы

1. Поведение величины en, определенной формулой (4), отражает устойчивость, разрушение и бифуркации стационарных решений.

а). Для пятивихревого режима резкое уменьшение значения параметра en при $25 \le r \le 42$ отражает разрушение этого стационарного решения,

б). Для трехвихревого режима скачкообразное увеличение значений параметра en при $r = 500$ отражает жесткое рождение неустойчивого периодического решения.

2. Скачкообразное увеличение значений en для четырехвихревого режима при $r = 20$, 28 и 32 отражает, предположительно, жесткое рождение новых неустойчивых решений.

3. Исследование зависимостей $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ и прямые численные расчеты стационарных решений системы (1) показали, что при уменьшении Pr происходит разрушение пятивихревого и четырехвихревого режимов, связанное с особенностями функций $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ при $\mathrm{Pr} = 0$. Разрушения трехвихревого режима при уменьшении Pr не происходит, так как функция $\lambda = \lambda(\mathrm{Pr})$ особенностей не имеет.

Список литературы

[1] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

[2] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.

[3] Alexander Yu. Gelfgat. Different modes of Rayleigh-Benard instability in two-and three-dimensional rectangular enclosures // J. Comput. Phys. 1999. Vol. 156. P. 300–324.

[4] Бабенко К. И., Рахманов А. И. Численное исследование двумерной конвекции. М., 1988 (Препр. / АН СССР. ИПМ. № 118).

[5] Палымский И. Б. Метод численного моделирования конвективных течений // Вычислит. технологии. 2000. Т. 5. № 6. С. 53–61.

[6] Палымский И. Б. Режимы конвективных течений в задаче Рэлея-Бенара // Вычислит. технологии. 2001 (в печати).

[7] Палымский И. Б. Хаос и детерминизм в двумерной конвекции // Прикладная механика и техническая физика. 2001 (в печати).

[8] Hao-wen Xi, Raul Toral, J. D. Gunton, Michael I. Tribelsky. Extensive chaos in the Nikolaevskii model // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 1. R17–20.