

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ И ЛЕДОТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА В ВОДОХРАНИЛИЩЕ СО ЗНАЧИТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ УРОВНЯ ВОДЫ

Д. В. Квон, В. И. Квон

*Институт водных и экологических проблем СО РАН, Барнаул, Россия*

e-mail: kvon@ad-sbras.nsc.ru

Предложена продольно-вертикальная численная модель стратифицированных течений и процессов переноса тепла в речном водохранилище, длина и глубина которого значительно изменяются в течение года. Модель учитывает метеорологические факторы, ветровые и стокового течения. Для описания термического режима в зимних условиях в модель введено дополнительное уравнение баланса тепла для льда. По этой модели проведены расчеты течений и термической структуры в проектируемом Крапивинском водохранилище в годовом цикле. Дано сопоставление результатов расчетов интегральных характеристик (средней по объему температуры воды в водохранилище и уровня воды в нем) по данной модели с результатами расчетов по нульмерной (объемной) модели.

## Введение

Рассматриваются течения, процессы переноса тепла и процессы формирования ледового покрова в водохранилище ГЭС в годовом цикле. Для их описания привлекается двухмерная вертикальная нестационарная математическая модель, содержащая уравнение импульсов в гидростатическом приближении, уравнения переноса тепла в водохранилище и баланса тепла для ледового покрова. Коэффициенты турбулентного обмена в модели определяются на основе ( $k$ -эпсилон) — модели турбулентности. В данной задаче вертикальная двухмерная область ее решения значительно изменяется во времени из-за колебания уровня воды в водохранилище. При относительно небольших колебаниях уровня воды в водоеме эти колебания обычно учитываются в численных алгоритмах тем, что толщина расчетного верхнего слоя (шаг разностной сетки у поверхности воды) принимается переменной по времени [1, 2]. Однако при больших колебаниях уровня воды, при которых толщина верхнего расчетного слоя становится сопоставимой с глубиной водоема, точность расчета может существенно уменьшиться из-за принятой разностной сетки. Такая ситуация может возникнуть при расчетах течений в речных водохранилищах. В частности, для проектируемого Крапивинского водохранилища на реке Томи разность уровней воды в нем при сезонных их изменениях достигает до половины его максимальной глубины, равной 46 м. При этом значительно изменяется также и длина водохранилища ( в интервале от 83 км до 132.8 км). В данной работе разработан алгоритм численного решения задачи на адаптивной сетке, в которой число расчетных точек изменяется во времени как по вертикали, так и по горизонтали. Алгоритм построения такой промежуточной разностной сетки составлен с соблюдением законов сохранения механики жидкости. Приводятся результаты тестирования алгоритма и численных расчетов стратифицированных течений, гидротермического и ледового режимов для водохранилища проектируемого Крапивинского гидроузла на реке Томи.

## 1. Постановка задачи

Уравнения осредненной по ширине водохранилища модели гидротермических процессов [2, 3] имеют следующий вид:

$$\frac{\partial bu}{\partial t} + \frac{\partial buu}{\partial x} + \frac{\partial bwu}{\partial z} = -gb \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta + \frac{1}{\rho_0} \int_z^{z^0} \rho dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} bK_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} bK_z \frac{\partial u}{\partial z} - sr|u|u; ++ \quad (1)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 98-01-03694, 99-01-00547, 00-01-96211).

© Д. В. Квон, В. И. Квон, 2001.

$$\frac{\partial bu}{\partial x} + \frac{\partial bw}{\partial z} = q; \quad (2)$$

$$\frac{\partial bT}{\partial t} + \frac{\partial buT}{\partial x} + \frac{\partial bwT}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} bD_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} bD_z \frac{\partial T}{\partial z} + qT_{in}, \quad (3)$$

$$\rho = \rho_w / (1.0 - p/k_p); \quad (4)$$

где  $s = \sum_{i=1}^2 [1 + (\frac{\partial b_i}{\partial x})^2 + (\frac{\partial b_i}{\partial z})^2]^{1/2}$ ,  $t$  — время, ось  $x$  направлена вдоль водохранилища по его длине от входного сечения в сторону проектируемой плотины, ось  $z$  — вертикально вверх;  $u$  и  $w$  — компоненты скорости по  $x$  и  $z$  соответственно;  $T$  — температура воды;  $q$  — распределение удельного расхода боковых притоков;  $T_{in}$  — температура воды боковых притоков;  $b(x, z)$  — ширина водохранилища;  $b = b_2 + b_1$ ;  $-b_1$  и  $b_2$  — ординаты боковых поверхностей водохранилища;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $K_x$  и  $K_z$  ( $D_x$  и  $D_z$ ) — коэффициенты турбулентной вязкости (температуропроводности) соответственно в горизонтальном ( $x$ ) и вертикальном ( $z$ ) направлениях;  $\eta$  — отклонение уровня воды от невозмущенного ее уровня  $z^0$ ;  $r$  — коэффициент сопротивления трения боковой поверхности водохранилища;  $\rho$  — плотность воды и  $\rho_0$  — постоянное ее значение;  $\rho_w(T, S)$  — плотность воды при стандартном атмосферном давлении,  $S$  — минерализация воды, принимаемая здесь постоянной;  $k_p(T, S, p)$  — объемный модуль упругости воды;  $p$  — давление воды, определяемое по формуле гидростатики. Для определения функций  $\rho_w(T, S)$  и  $k_p(T, S, p)$  здесь используются формулы, рекомендуемые Объединенной комиссией ЮНЕСКО по океанографическим таблицам и стандартам (см., например, [4]).

К системе уравнений (1)–(4) необходимо присоединить начальные и граничные условия. В начальный момент времени задаются распределения скорости, температуры и уровня водной поверхности. На водной поверхности задаются кинематическое условие, напряжение ветра и поток тепла. На дне водоема — условие непроницаемости, квадратичный закон сопротивления трения и равный нулю поток тепла. На входной вертикальной границе водохранилища, через которую вода втекает в него (река Томь), задаются скорость, расход воды и температура втекающей воды. На выходной вертикальной границе, через которую вода вытекает из водохранилища (в сечении плотины), задаются скорость, расход воды и равный нулю диффузионный поток тепла. Напряжение ветра и поток тепла через водную поверхность вычислялись по известным формулам (см. например, [2]) с использованием потоков солнечной радиации и среднесуточных метеоданных (скорости ветра, температуры и влажности воздуха, атмосферного давления и облачности).

Распределение удельного расхода  $q$  боковых притоков по длине озера в уравнении неразрывности (2) задавалось в виде дельта-функции в точках втекания притоков. Данные измерений температуры воды боковых притоков использовались при задании  $T_{in}$  в уравнении переноса тепла (3).

Коэффициенты вертикального турбулентного обмена определялись с использованием уравнения для энергии турбулентности  $\epsilon$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  [5]. Коэффициенты горизонтального турбулентного обмена определяются с использованием формулы Ричардсона [7].

Модель формирования и развития ледового покрова в работе представлена в виде уравнения для толщины льда  $\theta(t)$ , выражающего баланс тепла в нем [9]:

$$-\rho_i L_f \frac{d\theta}{dt} = q_{ni} - q_w, \quad (5)$$

где  $\rho_i$  — плотность льда,  $L_f$  — скрытая теплота плавления льда,  $q_{ni}$  — поток тепла, поступающий в ледовый покров через его верхнюю поверхность,  $q_w$  — поток тепла, поступающий из ледового покрова в воду через нижнюю поверхность льда (через границу раздела лед-вода).

## 2. Результаты расчетов

Модель численно реализована с использованием полунейвной конечно-разностной схемы [3]. При численном решении уравнений движения используется алгоритм, основанный на схеме расщепления по физическим процессам. На первом дробном шаге осуществляется перенос импульса адвекцией и диффузией, а на втором дробном шаге моделируется адаптация гидродинамических полей [8]. Уравнение для толщины льда (5) решается методом Рунге — Кутты.

В рассматриваемой задаче имеются две подвижные границы области решения: верхняя (свободная поверхность) и левая (входное сечение водохранилища). Разностные ячейки на этих границах изменялись во времени. При достижении ими определенных размеров или увеличивалось, или уменьшалось

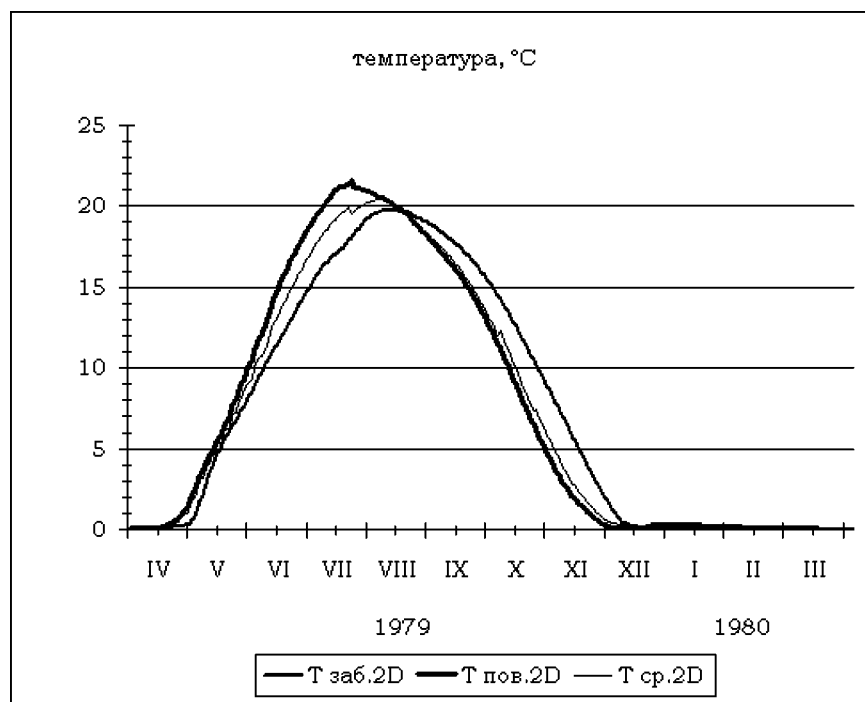


Рис. 1. Распределения температуры по времени на выходе из водохранилища ( $T_{\text{заб.2D}}$ ), на водной поверхности ( $T_{\text{пов.2D}}$ ) и средней температуры ( $T_{\text{ср.2D}}$ ), вычисленные по двумерной вертикальной модели.

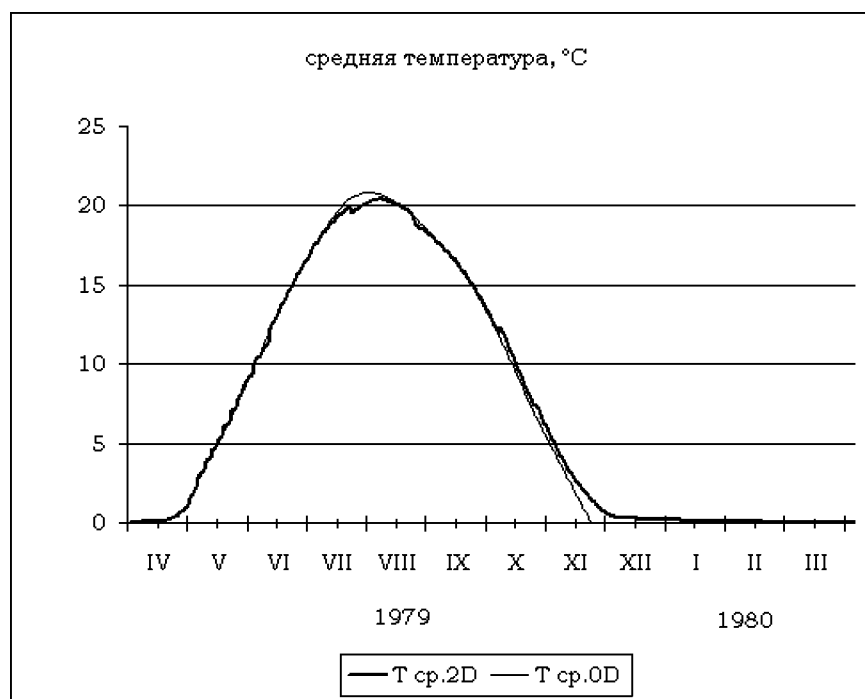


Рис. 2. Распределения средней температуры в водохранилище по времени, вычисленные по двумерной вертикальной ( $T_{\text{ср.2D}}$ ) и нульмерной ( $T_{\text{ср.0D}}$ ) модели.

число расчетных точек разностной сетки. В дополнительных точках переменные задачи определялись с использованием процедуры интерполяции, основанной на законах сохранения.

Разработанная модель применена к расчету гидротермического и ледового режимов проектируемого водохранилища Крапивинского гидроузла на р. Томи. Гидрологические и метеорологические данные для расчета соответствовали условиям 1979–1980 гидрологического года [10]. На рис. 1 приведены резуль-

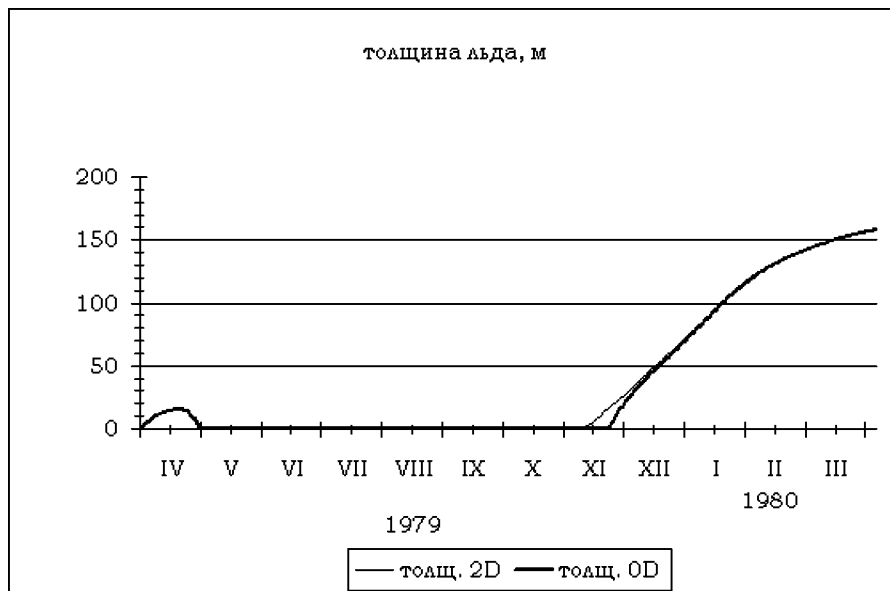


Рис. 3. Распределения средней толщины льда в водохранилище по времени, вычисленные по двумерной вертикальной (толщ. 2D) и нульмерной (толщ. 0D) модели.

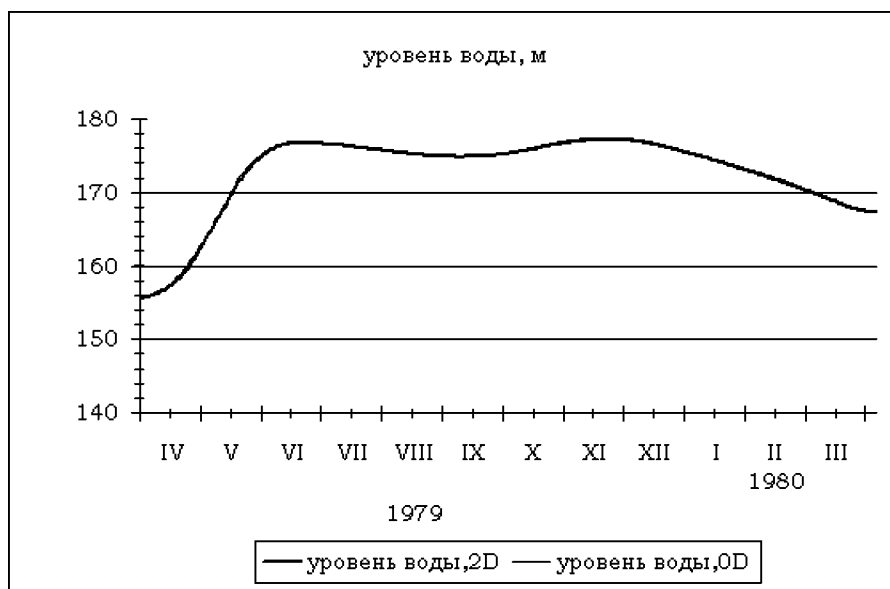


Рис. 4. Распределения среднего уровня воды в водохранилище по времени, вычисленные по двумерной вертикальной (уровень воды, 2D) и нульмерной (уровень воды, 0D) модели.

таты расчета средней температуры воды в водохранилище ( $T_{\text{ср.}2D}$ ), средней поверхностной температуры воды в нем ( $T_{\text{пов.}2D}$ ) и температуры воды ( $T_{\text{заб.}2D}$ ) на выходе из водохранилища (в сечении плотины). В водохранилище имеет место слабая термическая стратификация. Средняя поверхностная температура несколько выше средней температуры в водохранилище в июне и июле (прямая стратификация) и несколько ниже в октябре-декабре (обратная стратификация). Существенная разница в значениях средней

по водохранилищу температуры и температуры на выходе из водохранилища в данном случае обусловлена значительной горизонтальной неоднородностью температуры, а не вертикальной стратификацией, как часто бывает в глубоких водохранилищах. Из-за слабой стратификации, которая в основном и определяет характер теплообмена с атмосферой, средние температуры воды в водохранилище, вычисленные по данной двумерной модели близки к таковым, вычисленным по объемной (нульмерной) модели (рис. 2). Поэтому слабо отличаются между собой и толщины льда по указанным двум моделям (рис. 3). Уровень воды характеризует объем воды в водохранилище, который, как и другие переменные моделей, вычисляется при решении дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения механики жидкости. Напомним, что при численной реализации двумерной модели используется процедура интерполяции в окрестности подвижной границы. Практически полное совпадение вычисленных значений уровня воды по рассматриваемым двум моделям (рис. 4) указывает на то, что упомянутая процедура интерполяции не нарушает законы сохранения массы.

## Список литературы

- [1] Архипов Б.В., Солбаков В.В. Расчет термодинамического режима водоема по двумерной модели // Изв. АН, Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30, № 5. С. 671–685.
- [2] Д.В.Квон, В.И.Квон, А.Н.Семчуков. Численный расчет продольно-вертикальной термической структуры Телецкого озера в годовом цикле // Вычислит. технологии. 2000. Т. 5, № 3. С. 29–45.
- [3] Квон Д.В., Квон В.И. Численный расчет стоковых и термогравитационных течений в Телецком озере // Метеорология и гидрология. 1998. № 6. С. 68–76.
- [4] Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
- [5] Роди В. Модели турбулентности окружающей среды. В кн.: Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. С. 227–322.
- [6] Квон Д.В. Численное моделирование сезонных изменений температуры воды в Телецком озере // Вычислит. технологии. 1996. Т. 1, № 1. С. 48–56.
- [7] Озмидов Р.В. Горизонтальная турбулентность и горизонтальный обмен в океане. М.: Наука, 1968.
- [8] Марчук Г.И. Численные алгоритмы решения уравнений прогноза погоды // Докл. АН СССР, 1964. Т. 156, № 2.
- [9] WAKE A., RUMER R.R. Modeling ice regime of lake Erie // J. Hyd. Div. ASCE, 1979. NHY7, № 105. P. 827–844.
- [10] Сводный отчет о НИР "Оценка водохозяйственной и экологической ситуации на р. Томи и ее водосборном бассейне". Т. 2. ИВЭП СО РАН, Барнаул, 1992.