

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Ю. Н. ЗАХАРОВ, В. А. ХАНЕФТ
Кемеровский государственный университет, Россия

Рассматривается алгоритм определения нестационарной картины течения экспоненциально стратифицированной жидкости в безграничной области с различной конфигурацией дна.

1. Нестационарное течение экспоненциально стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска в бесконечном канале описывается следующим уравнением (см. [1])

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_{x_1 x_1} + u_{x_3 x_3} - \beta^2 u] + \omega_0^2 u_{x_1 x_1} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где $u = \Psi(x_1, x_3, t)e^{-\beta x_3}$, где Ψ — функция тока, позволяющая с помощью дифференцирования определить компоненты поля скоростей, $\omega_0^2 = 2\beta g$ — частота Вейселя-Брента, g — ускорение свободного падения направленное по оси x_3 , Ω — область решения.

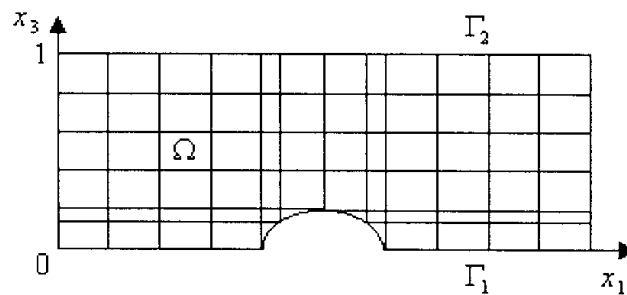


Рис. 1. Область решения.

В [1] для уравнения (1) приведено несколько начально-краевых задач в бесконечных областях, которые имеют единственное решение без задания краевого условия на бесконечности. Поэтому, при численном решении этих задач в конечной области мы не имеем право что-либо задавать на ее границе.

Настоящая работа и посвящена алгоритму решения краевых задач для уравнения (1) поставленных в бесконечных областях.

Далее для уравнения (1) в области Ω (см. рис. 1) мы будем рассматривать следующие задачи.

Задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ и удовлетворяющую уравнению (1), граничным условиям

$$u|_{x_3 \in \Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad u(x, t)|_{x_1=0} = f(x_3, t), \quad x_3 \in [0, 1] \quad (2)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad (3)$$

где $f(x_3, t) = \begin{cases} \sin(2\pi x_3 + \pi) \sin(\pi t), & t \leq \bar{t} \\ 0, & t > \bar{t} \end{cases}$. Здесь Ω — полубесконечный канал, на дне которого располо-

жено препятствие, описываемое функцией вида $y(x_1) = L \frac{e^{-(x_1-a)^2} - e^{-0.04}}{1 - e^{-0.04}}$, где L — высота препятствия, a — середина препятствия по x_1 .

Задача 2. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ и удовлетворяющую уравнению (1), граничным условиям

$$u|_{x_3 \in \Gamma_1, \Gamma_2} = 0, \quad u(x, t)|_{x_1=0} = f(x_3, t), \quad x_3 \in [0, 1] \quad (4)$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad (5)$$

где $f(x_3, t) = \begin{cases} \sin(2\pi x_3 + \pi) \sin(\pi t), & t \leq \bar{t} \\ 0, & t > \bar{t} \end{cases}$. Здесь Ω — полубесконечный канал, на дне которого расположена тонкая, но конечной ширины, колеблющаяся по следующему закону $\sin\left(\frac{2\pi x_3}{L} + \pi t\right)$ пластинка высотой $L = 0.3$.

Задача 3. Найти функцию $u(x, t)$, определенную при $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ и удовлетворяющую уравнению (1), граничным условиям

$$u|_{x_3 \in \Gamma_1, \Gamma_2} = 0 \tag{6}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \text{const}. \tag{7}$$

Здесь Ω — бесконечный канал, на дне которого расположено препятствие, описываемое функцией вида $y(x_1) = L \frac{e^{-(x_1-a)^2} - e^{-0.04}}{1 - e^{-0.04}}$, где L — высота препятствия, a — середина препятствия по x_1 . Причем высота препятствия меняется со временем по закону $L = 0.1 + \frac{|\sin(\pi t)|}{4}$.

Предлагаемый алгоритм решения задач 1-3 мы рассмотрим на примере задачи 1.

2. Введем в области Ω прямоугольную неравномерную по x_1 и x_3 сетку $\Omega_h = \{x_{1i} = x_{1i-1} + h_{1i}, x_{3j} = x_{3j-1} + h_{3j}, i \in I, j \in J, I, J$ — множество индексов}, согласованную с границей $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Аппроксимируем на сетке Ω_h задачу (1)-(3) разностной задачей

$$(\Delta_h - \beta^2 E) \left(\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \omega_0^2 \Delta_{1h} u_{ij}^{n+1} = 0, \tag{8}$$

$$u_{ij}^0 = \frac{u_{ij}^1 - u_{ij}^0}{\Delta t} = 0, \tag{9}$$

$$u_{0j}^{n+1} = f(x_3, t_{n+1}), \tag{10}$$

$$i = 1, 2, \dots, m_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, m_3 - 1.$$

$$u_{im_3}^n = u_{i0}^n = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m_1$$

Здесь $\Delta_h = \Delta_{1h} + \Delta_{3h}$,

$$\Delta_{1h} u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h_{1i}} \left(\frac{u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{h_{1i+1}} - \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{i-1j}^{n+1}}{h_{1i}} \right),$$

$$\Delta_{3h} u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{h_{3j}} \left(\frac{u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{h_{3j+1}} - \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij-1}^{n+1}}{h_{3j}} \right),$$

E — единичный оператор, $h_{1i} = \frac{1}{2}(h_{1i+1} + h_{1i})$, $h_{3j} = \frac{1}{2}(h_{3j+1} + h_{3j})$, $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, Δt — шаг по времени.

В силу того, что область Ω по x_1 не ограничена, то при численной реализации мы вынуждены индекс i ограничить постоянной m_1 и в точке x_{1m_1} , где также выполняется уравнение (1), аппроксимируем его разностным соотношением

$$(\Delta_h - \beta^2 E) \left(\frac{u_{m_1j}^{n+1} - 2u_{m_1j}^n + u_{m_1j}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \omega_0^2 \Delta_{1h} u_{m_1j}^{n+1} = 0, \tag{11}$$

$$j = 1, 2, \dots, m_3 - 1,$$

$$\Delta_{1h} u_{m_1j}^{n+1} = \frac{u_{m_1-2j}^{n+1} - 2u_{m_1-1j}^{n+1} + u_{m_1j}^{n+1}}{h_{1m_1}^2},$$

$$\Delta_{3h} u_{m_1j}^{n+1} = \frac{1}{h} \left(\frac{u_{m_1j+1}^{n+1} - u_{m_1j}^{n+1}}{h_{3j+1}} - \frac{u_{m_1j}^{n+1} - u_{m_1j-1}^{n+1}}{h_{3j}} \right).$$

При построении сетки Ω_h мы полагали $h_{1m_1-1} = h_{1m_1}$.

Таким образом, чтобы найти решение u_{ij}^{n+1} разностной задачи (8)–(11) необходимо для каждого $n = 1, 2, \dots$ решать систему линейных уравнений

$$Au = f, \quad (12)$$

где $u = \{u_{ij}^{n+1}\}$, $i \in (1, m_1)$, $j \in (1, m_3 - 1)$, f — известный вектор правых частей, зависящий от краевых условий и от u_{ij}^n . Размерность вектора u равна количеству точек разбиения области Ω .

Очевидно, в силу односторонней аппроксимации (11) внутри области уравнения (1), матрица A заведомо не самосопряженная. Совершенно не очевидно, что матрица A знакоопределена. Поэтому для решения системы (12) мы использовали т.н. итерационную схему неполной аппроксимации [2].

3. Для решения (12) на каждом шаге по времени $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ рассмотрим явную итерационную схему

$$u^{k+\frac{1}{2}} = u^k - \tau_{k+1} r^k, \quad (13)$$

$$u^{k+1} = u^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_{k+1} z^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

u^0 — начальные данные, которые мы задавали как решение задачи (5)–(8) на момент времени t_n , $r^k = Au^k - f$ — невязка, z^k — произвольный вектор, τ_{k+1} выбирается из условия минимума нормы невязки $r^{k+\frac{1}{2}} = Au^{k+\frac{1}{2}} - f$, α_{k+1} — диагональная матрица итерационных параметров $\{\alpha_{k+1}^p\}$, $p = 1, 2, \dots, M$. Перепишем (11) в виде

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= y_p - \alpha_{k+1}^{p+1} z_{p+1}^k - \alpha_{k+1}^{p+2} z_{p+2}^k - \dots - \alpha_{k+1}^M z_M^k, \\ y_p &= u^{k+\frac{1}{2}} - \alpha_{k+1}^1 z_1^k - \dots - \alpha_{k+1}^p z_p^k. \end{aligned}$$

Параметр $\{\alpha_{k+1}^p\}$ последовательно выбираем из условия минимизации

$$\|r_p\|^2 = \|r_{p-1}\|^2 - 2\alpha_{k+1}^p (y_{p-1}, Az^k) + (\alpha_{k+1}^p)^2 \|Az^k\|^2, \quad p = 1, 2, \dots, M,$$

где $r_p = Ay_p - f$, $r_0 = Au^{k+\frac{1}{2}} - f$, $r_M = Au^{k+\frac{1}{2}} - f = r^{k+1}$.

Такой способ выбора матрицы параметров α_{k+1} обеспечивает сходимость u_k схемы (13)–(14) к решению системы (12) для произвольной неособенной матрицы A . Более подробно см. [3].

4. В данном разделе приведены результаты расчетов задач 1–3. Во всех расчетах итерации на каждом шаге t_{n+1} останавливались при выполнении условия $\frac{\|r^{n+1}\|}{\|r^0\|} \leq 10^{-3}$, частота Вейсяля-Брента $\omega_0^2 = 10^{-3}$. На рисунках 2–4 показано решение задачи 1 в различные моменты времени.

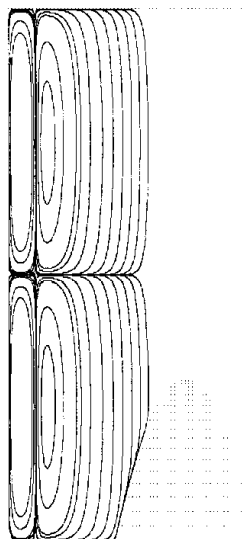


Рис. 2. Время $t = 0.015$.

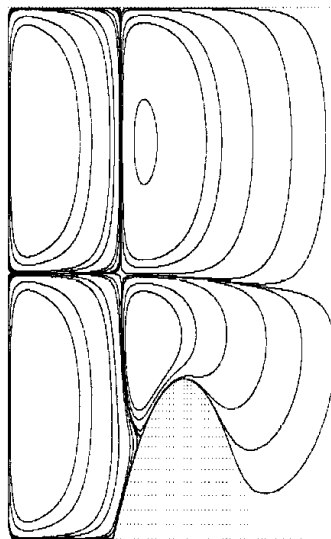


Рис. 3. Время $t = 1.5$.

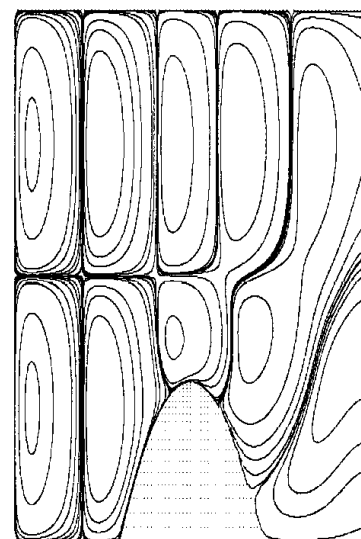
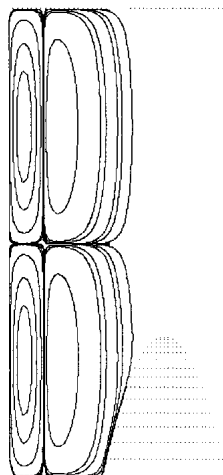
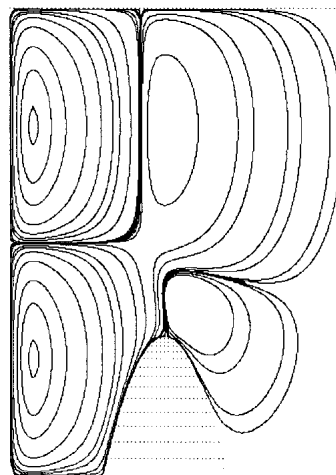
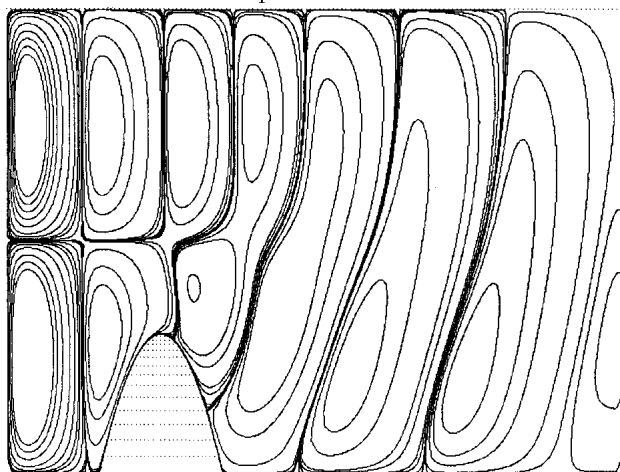


Рис. 4. Время $t = 3$.

Область решения $\Omega = \{[0, 1]\} \times [0, 1]$, $t \in [0, 3]$, $m_1 = 100$, $m_3 = 55$, количество интервалов разбиения по t $s = 4000$, $\Delta t = 0.00075$, $a = 0.5$.

Рис. 5. Время $t = 0.015$.Рис. 6. Время $t = 1.5$.Рис. 7. Время $t = 3$.

Для проверки решения мы рассмотрели задачу 1 на большем интервале.

Область решения $\Omega = \{[0, 2]\} \times [0, 1]\}$, $t \in [0, 3]$, $m_1 = 140$, $m_3 = 55$, количество интервалов разбиения по t $s = 4000$, $\Delta t = 0.00075$, $a = 0.5$.

Из проведенных расчетов видно, что решения в одинаковый момент времени совпадают с точностью $\|u_1 - u_2\| \leq 5 \cdot 10^{-2}$.

На рисунках 8–9 показано решение задачи 2 в различные моменты времени.

Область решения $\Omega = \{[0, 1]\} \times [0, 1]\}$, $t \in [0, 3]$, $m_1 = 100$, $m_3 = 100$, количество интервалов разбиения по t $s = 1500$, $\Delta t = 0.002$.

Из рисунков 8–9 видно, что со временем жидкость расслаивается на большое количество вихрей. Несмотря на левое краевое условие со временем решение стремится к симметричности. Увеличение области решения вправо, аналогично задаче 1, не приводит к ухудшению решения.

Область решения $\Omega = \{[0, 2]\} \times [0, 1]\}$, $t \in [0, 5]$, $m_1 = 140$, $m_3 = 60$, количество интервалов разбиения по t $s = 100$, $\Delta t = 0.05$, $a = 1$.

Решение задачи 3 имеет особенность, которая заключается в том, что на каждом временном слое, матрица A решаемой системы (1) зависит от области Ω и тем самым, в отличие от предыдущих задач, здесь крайне затруднительно использовать не градиентные методы.

Из приведенных расчетов следует, что предлагаемый алгоритм достаточно эффективен при решении нестационарных задач движения стратифицированной жидкости. На рисунках 10–12 показано решение задачи 3 в различные моменты времени.

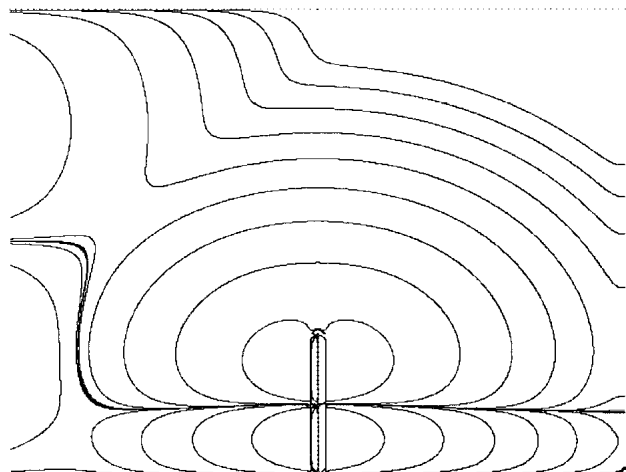


Рис. 8. Время $t = 0.004$.

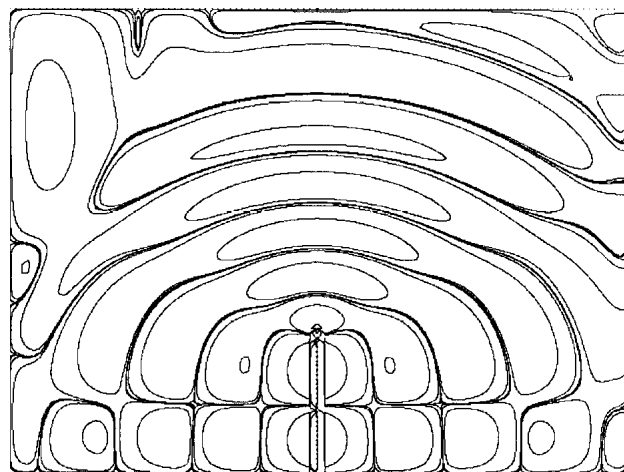


Рис. 9. Время $t = 0.04$.

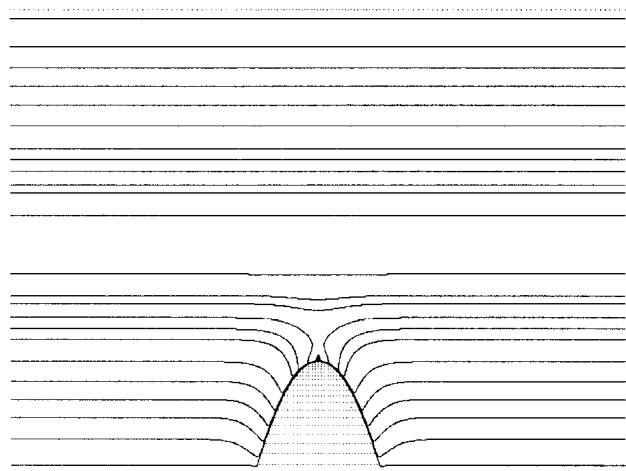


Рис. 10. Время $t = 0.01$.

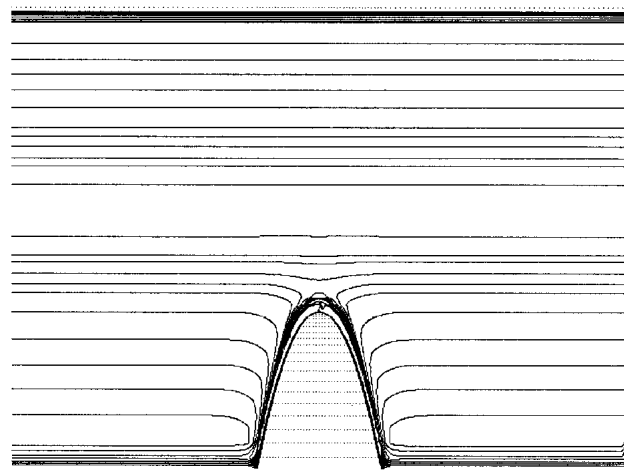


Рис. 11. Время $t = 0.1$.

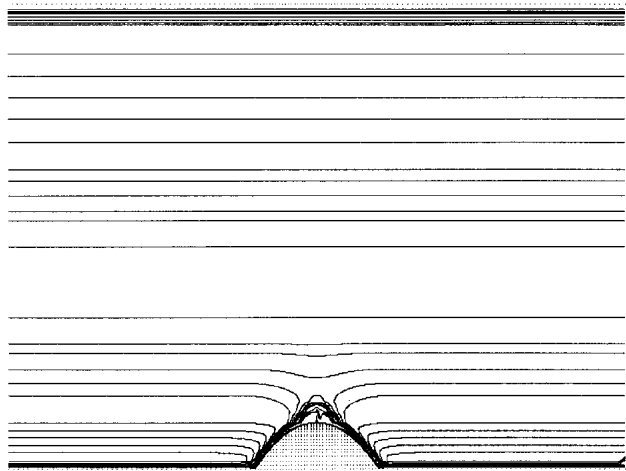


Рис. 12. Время $t = 5$.

Список литературы

- [1] ГАБОВ С. А., СВЕШНИКОВ А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
- [2] ЗАХАРОВ Ю. Н. Итерационные схемы неполной аппроксимации // ЧММСС. 1985. Т. 16, 6. С. 77–83.
- [3] ЗАХАРОВ Ю. Н. Итерационные схемы неполной аппроксимации решения систем линейных с знакоопределенной матрицей. Конструирование алгоритмов и решения задач математической физики. Сб. науч. тр., М., 1989. С. 197–201.