

## ЗАДАЧА О ТЕПЛОМ УДАРЕ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

В.Н. ДЕМИДОВ

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия*

e-mail: demidov@ispms.tsc.ru

Рассматривается задача о тепловом ударе на поверхности полупространства, свойства которого описываются упругопластической моделью с учетом динамических эффектов, тепловой инерции, связанности тепловых и механических полей. Задача решается численно с использованием метода Годунова С.К.

**1.** Многие технологические процессы (сварка, наплавка, резание, плазменное нанесение покрытий, обработка поверхности лазерным или электронным лучом и т. д.) связаны с интенсивным тепловым воздействием на обрабатываемый материал. В этих условиях происходит резкое изменение температуры поверхности материала – тепловой удар. Существует обширный класс прикладных задач [1-3], связанных в той или иной степени с проблемой теплового удара.

Задача о тепловом ударе впервые была рассмотрена в работах [4,5] рамках так называемой теории температурных напряжений [6,7]. Это наиболее простая постановка задачи, позволяющая получить аналитическое решение. В дальнейшем исходная постановка задачи получила обобщение в нескольких направлениях, что отражено в обзоре [8].

В данной работе задача о тепловом ударе рассматривается в обобщенной постановке (“обобщенность” понимается в смысле [9]) с учетом связанности тепловых и механических процессов. В этом случае учитывается взаимное влияние эффектов обусловленных: 1) теплопроводностью, 2) динамическими (инерционными) членами, входящими в уравнения движения, 3) связанностью полей деформации и температуры, 4) тепловой инерцией (конечной скоростью распространения тепла) и 5) диссипативными процессами вследствие пластичности. Это одна из наиболее общих постановок задачи о тепловом ударе.

**2.** Математическая постановка задачи включает уравнения баланса (массы, количества движения, энергии)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_m (\rho u_m) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u_k)}{\partial t} + \nabla_m (\rho u_k u_m - \sigma_{km}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho c_\varepsilon \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_k \nabla_k T \right) = -\nabla_m q_m - 3KT\alpha_T \nabla_k u_k + s_{mk} e_{mk}^p \quad (3)$$

и определяющие уравнения для вектора теплового потока

$$q_k + \tau_q \left( \frac{\partial q_k}{\partial t} + u_m \nabla_m q_k \right) = -\lambda \nabla_k T, \quad (4)$$

и тензора напряжений

$$\frac{\partial s_{ik}}{\partial t} + u_m \nabla_m s_{ik} - \omega_{im} s_{km} - \omega_{km} s_{im} + \Lambda s_{ik} = 2\mu e_{ik}, \quad (5)$$

$$p = p(\rho, T), \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^e + \varepsilon_{ik}^p, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_k + \nabla_k u_i), \quad e_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} (\nabla_m u_m) \delta_{ik},$$

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_i - \nabla_i u_k), \quad \sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + s_{ik}, \quad p = -\frac{1}{3} \sigma_{km} \delta_{km},$$

$$s_{km}s_{km} \leq \frac{2}{3}\sigma_Y^2, \quad \Lambda = \frac{3\mu s_{km}e_{km}^p}{\sigma_Y^2} H\left(s_{km}s_{km} - \frac{2}{3}\sigma_Y^2\right) H\left(s_{km}e_{km}^p\right)$$

В приведенных соотношениях  $\rho$  -плотность,  $\sigma_{ik}, \varepsilon_{ik}, \delta_{ik}$  -компоненты тензоров напряжений, скоростей деформаций и единичного тензора соответственно,  $u_k$  -компоненты вектора скорости,  $T$  -температура,  $c_\varepsilon$  -теплоемкость при постоянной деформации,  $\alpha_T$  -коэффициент линейного термического расширения,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $K$  -изотермический коэффициент объемного сжатия,  $\tau_q$  -время релаксации теплового потока,  $\mu$  -модуль сдвига,  $\sigma_Y$  -динамический предел текучести,  $H$  -функция единичного скачка Хевисайда.

Отдельные слагаемые, входящие в правую части уравнения (3), ответственны за диссипацию энергии вследствие теплопроводности ( $\nabla_m q_m$ ), связанности тепловых и деформационных процессов ( $3KT\alpha_T \nabla_k u_k$ ) и необратимых эффектов, обусловленных пластическим течением ( $s_{km}e_{km}^p$ ). Здесь предполагается, что работа напряжений на пластических деформациях полностью рассеивается, переходя в тепло.

Соотношение (4), называемое обычно обобщенным законом Фурье, по своей структуре идентично релаксационному уравнению Максвелла. Оно может быть получено формально добавлением к классическому закону теплопроводности Фурье  $q_k = -\lambda \nabla_k T$  слагаемого, учитывающего тепловую инерцию. С физической точки зрения отличие уравнений (4) от закона Фурье заключается в том, что оно учитывает "эффект запаздывания", обусловленный релаксацией системы к локальному термодинамическому равновесию. Уравнение (4) можно рассматривать как обобщение линейных соотношений Онзагера [10] на случай нарушения локального термодинамического равновесия в зонах больших (бесконечных) градиентов поля температуры при тепловом ударе. С другой стороны оно может быть интерпретировано как весьма частный случай общего уравнения состояния материала с тепловой памятью [11].

Уравнение (5), связывающее дивергенты тензора напряжений  $S_{ik}$  и тензора скоростей деформаций  $e_{ik}$ , можно получить [12], если для упругой составляющей  $e_{ik}^e$  в аддитивном разложении  $e_{ik} = e_{ik}^e + e_{ik}^p$  принять гипопругий закон деформирования [13], в котором в качестве объективной меры скорости изменения напряжений принята производная Яуманна, а для пластической составляющей  $e_{ik}^p$  - ассоциированный закон течения с условием пластичности Мизеса [14].

Рассмотрим упругопластическое полупространство  $x \equiv x_1 \geq 0$ , температура поверхности которого в начальный момент времени  $t = 0$  вследствие внешнего воздействия внезапно повышается от  $T_0$  до  $T_b$  и далее остается постоянной, т.е.

$$T|_{x=0} = T_b H(t)$$

Дополнительно к условию термического нагружения (00) рассмотрим два типа механических граничных условий: когда плоскость  $x = 0$  свободна от напряжений (**задача I**)

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \sigma_{12}|_{x=0} = \sigma_{13}|_{x=0} = 0,$$

и когда она жестко закреплена (**задача II**)

$$u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0} = u_3|_{x=0} = 0.$$

Начальные условия

$$\sigma_{ik}|_{t=0} = \varepsilon_{ik}|_{t=0} = u_k|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0,$$

соответствуют ненапряженному и недеформированному полупространству, находящемуся в покое с однородным распределением начальной температуры и плотности.

**3.** Приведем пример конкретного расчета. Он выполнен при следующих постоянных значениях теплофизических и механических параметров, входящих в систему уравнений (00)-(00):

$$c_\varepsilon = 4.98 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad K = 162.1 \text{ ГПа}, \quad \alpha_T = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \lambda = 80 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$\mu = 90.6 \text{ ГПа}, \quad \tau_q = 10^{-11} \text{ с}, \quad \sigma_Y = 0.75 \text{ ГПа}, \quad \rho_0 = 7.85 \text{ г}/\text{см}^3.$$

Начальная и граничная температура имели значения:  $T_0 = 293 \text{ К}$  и  $T_b = T_0 + 1000 \text{ К}$ . Результаты численных расчетов получены с помощью разностной схемы С.К. Годунова, краткое описание которой можно найти в [15]. Это – явная однородная монотонная схема первого порядка точности; по своим внутренним свойствам она вполне аналогична газодинамической схеме Годунова [16].

Результаты проиллюстрированы на рис.1 – 4. На всех рисунках профили физических параметров, соответствующие задаче I, показаны пунктирными линиями, а задаче II – сплошными. Цифры около кривых соответствуют различным моментам безразмерного времени  $t' = t / \tau_q$ , где в качестве масштаба фигурирует время релаксации теплового потока. Кроме этого, для сравнения на рис. 1d, 2d, 3d пунктирными линиями показаны графики температуры, соответствующие решению параболического уравнения теплопроводности:

$$T(x, t) = (T_b - T_0) \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{at}} \right),$$

а штрих пунктирными – гиперболического уравнения теплопроводности [11]:

$$T(t, x) = T_0 + H(\xi) \left\{ T_b(\xi) \exp \left( -\frac{x}{2a_T \tau} \right) + \frac{x}{2a_T \tau} \int_0^\xi \hat{T}(\eta) \frac{1}{\sqrt{\chi}} I_1 \left[ (2\tau)^{-1} \sqrt{\chi} \right] \exp \left( -\frac{t-\eta}{2\tau} \right) d\eta \right\},$$

где

$$\xi = t - xa_T^{-1}, \quad \chi = (t - \tau)^2 - x^2 a_T^{-2}, \quad a_T^2 = \lambda(\rho c_\varepsilon \tau)^{-1},$$

$I_1$  - функция Бесселя первого рода мнимого аргумента,  $H$  - функция Хевисайда.

Не имея возможности в данном кратком сообщении сколько-нибудь подробно останавливаться на физической стороне вопроса, обратим внимание лишь на основные качественные особенности волновой картины движения, развивающейся на начальной стадии теплового удара.

Прежде всего, отметим, что здесь имеется несколько различных скоростей распространения термомеханических возмущений

$$a_E = \sqrt{\left( K_S + \frac{4}{3} \mu \right) \rho^{-1}}, \quad a_H \approx a_E, \quad a_P = \sqrt{\frac{K_S}{\rho}}, \quad a_T = \sqrt{\frac{a}{\rho}}, \quad (7)$$

где  $K_S$  - объемный модуль адиабатической сжимаемости,  $a = \lambda(\rho c_\varepsilon)^{-1}$  - коэффициент температуропроводности (в рассматриваемом случае  $a_E = 6022 \text{ м}/\text{с}$ ,  $a_P = 4569 \text{ м}/\text{с}$ ,  $a_T = 1431 \text{ м}/\text{с}$ ). В соответствии с этим упругопластическая волна, инициированная тепловым ударом, имеет несколько характерных участков. Для удобства дальнейших ссылок волны, распространяющиеся со скоростями (7), будем называть E-, H-, P-, и T-волнами соответственно. Как показано на рис.1, состояние среды в этих волнах меняется скачком. За фронтом T-волны, где происходит резкое возрастание температуры, давления и плотности, наблюдается интенсивное расширение вещества, что приводит в задаче I к формированию импульса растягивающих напряжений (рис. 1a, 2a), а скорость движения свободной поверхности в отрицательном направлении оси  $X$  составляет десятки метров в секунду (рис. 1b). Развивающиеся в T-волне процессы имеют ярко выраженный неравновесный характер, что отчетливо видно на профилях давления (рис. 1c, 2c): сначала возникает “пересжатие”, затем – “перерасширение” вещества, и лишь при  $t \sim 10\tau_q$  значение давления выходит на равновесное значение ( $p = 0.5 \text{ ГПа}$ ), соответствующие заданному граничному условию ( $\sigma_{11} \equiv s_{11} - p = 0$ ) режиму. В этом проявляется специфика обобщенного закона теплопроводности (4).

Между Е- и Т-волнами содержится область непрерывного течения, соответствующая волне разгрузки R. С течением времени эта волна снимает напряжения до нулевого уровня (рис. 2); далее Т- и Е-волны выглядят в задаче I изолированными (рис. 3). Однако между ними все время продолжается взаимодействие, и развивающиеся в Т-волне процессы существенно влияют на затухание Е-волны.

Что касается количественных отличий в поведении решений задач I и II, то они, очевидно, связаны с условиями стесненного деформирования в задаче II. Материал полупространства, испытывая большое объемное расширение за Т-волной, уже не имеет возможности, в силу условий закрепления (00), свободно расширяться в направлении оси  $X$ . В итоге давление в задаче II за Т-волной существенно выше, а напряжение  $\sigma_{11}$  остается сжимающим. Кроме этого, появляется дополнительный Р-скачок, отсутствующий в задаче I. Это связано с тем, что интенсивность касательных напряжений за Н-волной достигает максимально возможной величины, соответствующей условию текучести Мизеса. Напряжение  $\sigma_{11}$  в Н-волне равно пределу упругости Гюгонио на ударной адиабате. Адиабата имеет в этой точке излом, и напряжения, превышающие гюгониевский предел, распространяются со скоростью объемных волн  $a_p$ .

На рис. 4 приведены профили напряжения  $\sigma_{11}(x)$  в три момента времени  $t' = 0.1, 0.2, 0.3$  (задача I), и для сравнения показано, соответствующее тем же моментам времени, известное в термоупругости [17, 18] решение

$$\sigma_{11}(x, t) = -A[D(x, t) + C(x, t)], \quad (8)$$

где

$$A = 3K_T \alpha_T (T_b - T_0), \quad C(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{a_E^2}{a} \left(t - \frac{x}{a_E}\right)\right] H\left(t - \frac{x}{a_E}\right),$$

$$D(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{a_E^2}{a} \left(t + \frac{x}{a_E}\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + a_E \sqrt{\frac{t}{a}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left[\frac{a_E^2}{a} \left(t - \frac{x}{a_E}\right)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} - a_E \sqrt{\frac{t}{a}}\right)$$

Диффузионная часть решения, описываемая функцией  $D(x, t)$ , соответствует бесконечной скорости распространения тепла, поэтому сжимающие напряжения возникают сразу в каждой точке полупространства. Второе слагаемое  $C(x, t)$  определяет термоупругую волну, распространяющуюся со скоростью  $C_E$ . Во фронте этой волны напряжение  $\sigma_{11}$  изменяется скачком на величину  $A$  (в рассматриваемом примере  $A = 4.86$  ГПа) и становится растягивающим. Как видно из рисунка, решение (8) даже качественно не согласуется с решением, полученным в данной работе. Проводить здесь количественное сопоставление результатов было бы некорректным, поскольку решение (8) справедливо при выполнении условия  $(T - T_0)T_0^{-1} \ll 1$ , которое в рассматриваемом примере явно не имеет места.

Таким образом, волновая картина движения, сопутствующая тепловому удару, несравненно богаче и сложнее того, что предсказывают известные термоупругие решения.

В этой связи подчеркнем, что используемые до настоящего времени в некоторых работах оценки термической прочности материалов, основанные на решениях вида (00), могут оказаться несостоятельными, ибо разрушение приповерхностных слоев, если оно вообще происходит, развивается именно на начальной (волновой) стадии теплового удара, когда относительная роль факторов, связанных с механической и тепловой инерцией, максимальна, и по сути дела определяет всю эволюцию поля термических напряжений.

Что же касается “тепловой части” задачи, то приведенные на рис. 1d, 1e, 2d, 3d результаты лишней раз подтверждают известное положение о слабом влиянии эффекта связанности тепловых и механических процессов на распределение температуры. Во всяком случае, это справедливо для типичных конструкционных материалов типа сплавов на основе железа и алюминия. Для таких материалов при расчете поля температуры можно пренебречь вкладом механических процессов и использовать гиперболическое (при  $t \leq 10\tau_q$ ) или

более простое параболическое уравнение теплопроводности (при  $t \geq 100\tau_q$ ). В то же время отметим, что относительный вклад пластических деформаций, определяемый свойствами материала и интенсивностью внешнего термического воздействия, для неметаллических материалов может быть существенно иным, чем в приведенном здесь примере. Наконец, отметим, что на затухание термоупругих волн оказывают существенное влияние все отмеченные в п.1. факторы, а также краевые условия на поверхности полупространства.

## Список литературы

- [1] Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии. М.: Наука, 1989.
- [2] Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. М.: Наука, 1985.
- [3] Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанные и динамические задачи термоупругости. М.: Машиностроение, 1984.
- [4] Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. Прикл.мат.и мех. 1950. Т.14, № 3. С.316-318.
- [5] Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. Прикл. мат. и мех. 1952. Т.16, № 3. С.342-344.
- [6] Боли Б.А., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
- [7] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963.
- [8] Карташев Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. 1991. Т 22, С. 55-127.
- [9] Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976.
- [10] Базаров И.П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1991.
- [11] Лыков А.В. Теплообмен. Справочник. М.: Энергия, 1978.
- [12] Белов Н.Н., Демидов В.Н., Ефремова Л.В. и др. Компьютерное моделирование динамики высокоскоростного удара и сопутствующих физических явлений. Изв. ВУЗов. Физика. 1992. № 8. С. 5-48.
- [13] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
- [14] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
- [15] Демидов В.Н. Метод Годунова для обобщенно-одномерных динамических задач термоупругопластичности. Математическое моделирование в синергетических системах. Всероссийская научная конференция, 20-23 июля 1999.Томск – Улан-Удэ. С.226-228.
- [16] Годунов С.К. Разностный метод расчета разрывных решений гидродинамики. Матем. сб. 1959. Т. 47, №3. С. 271-306.
- [17] Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
- [18] Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975.

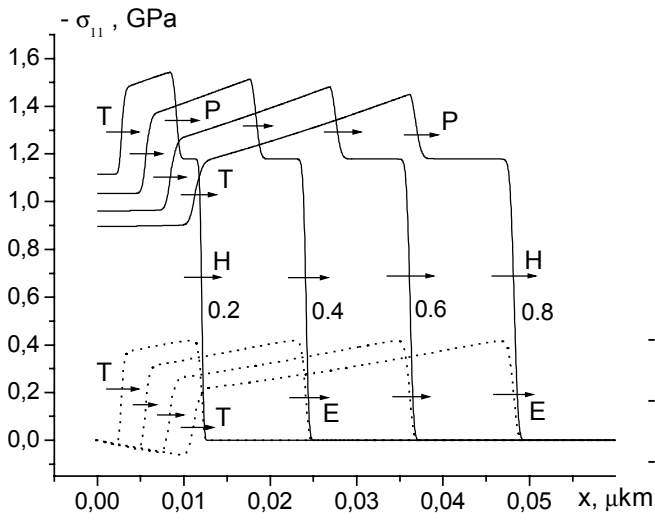


Рис. 1 а)

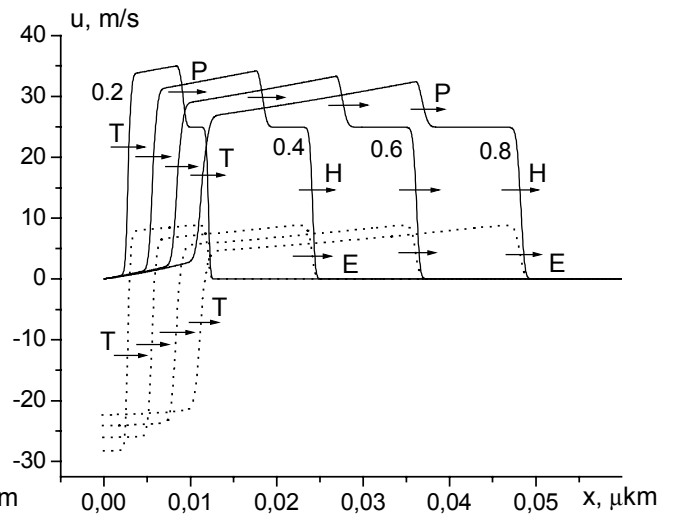


Рис. 1 б)

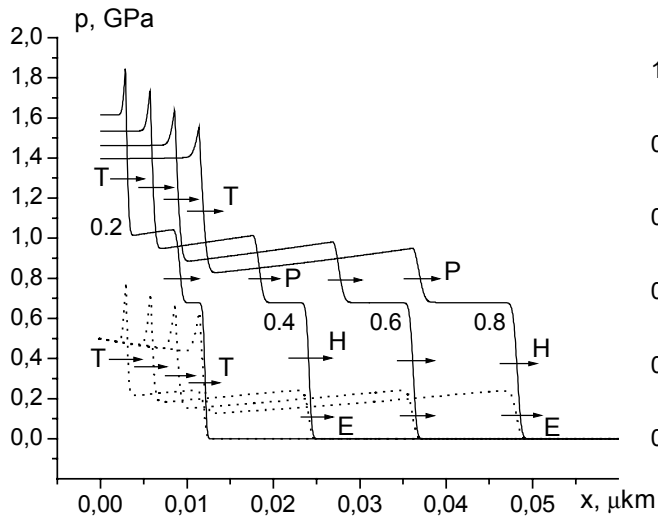


Рис. 1 с)

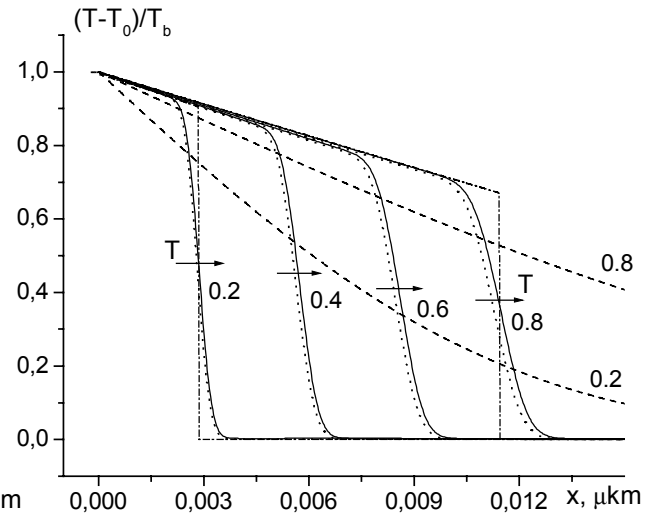


Рис. 1 д)

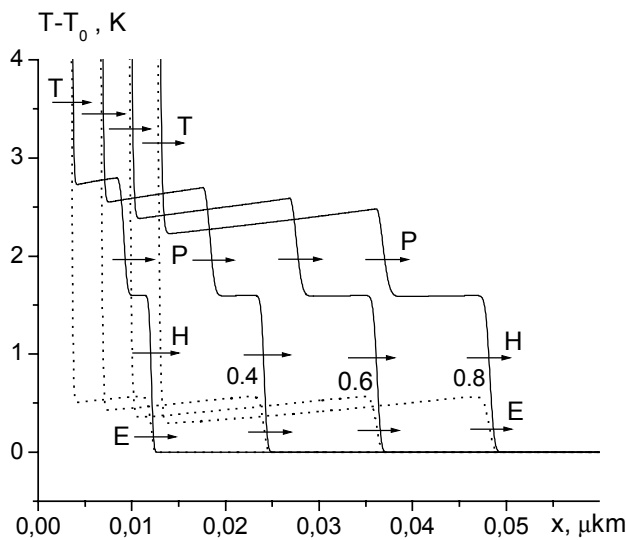


Рис 1

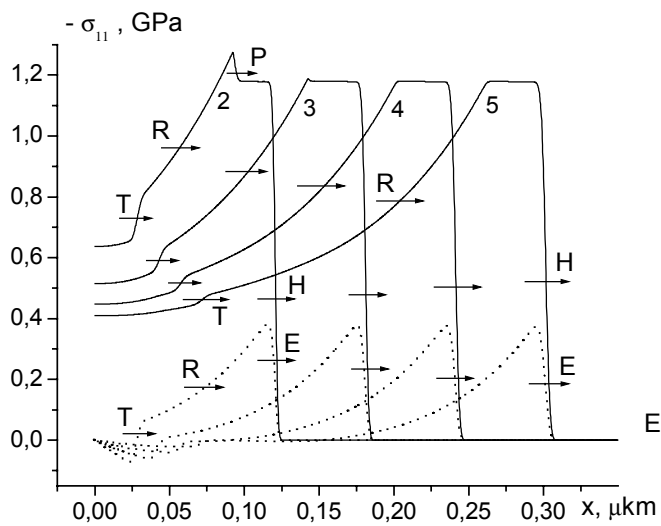


Рис 2 а)

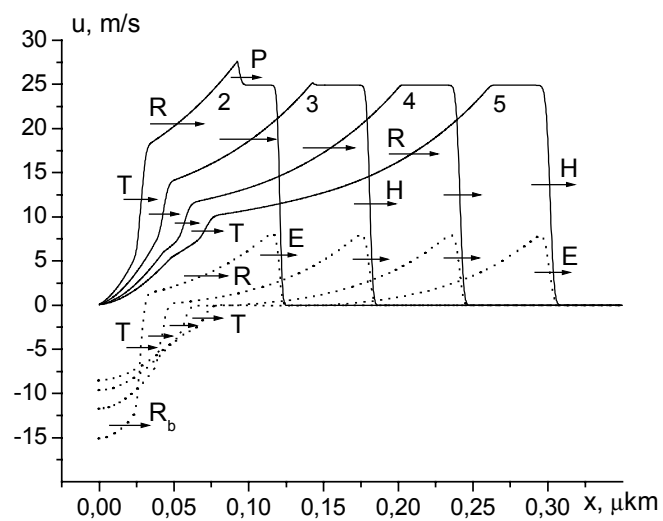


Рис 2 б)

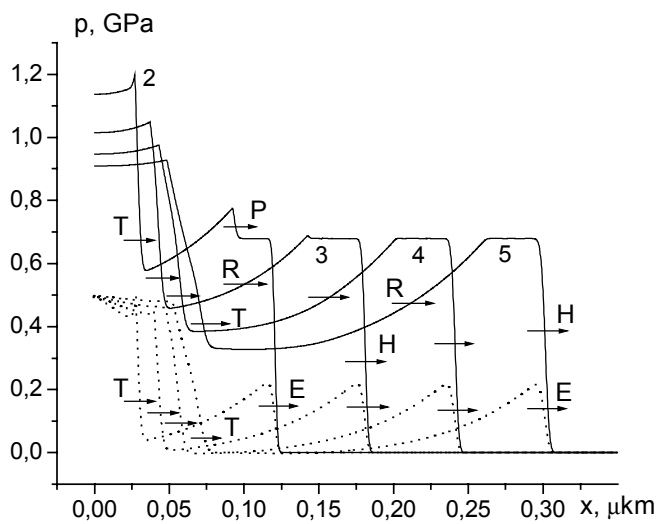


Рис 2 с)

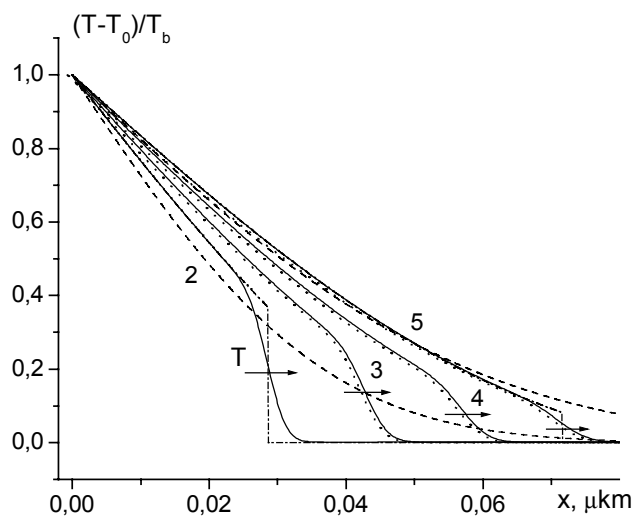


Рис 2 д)

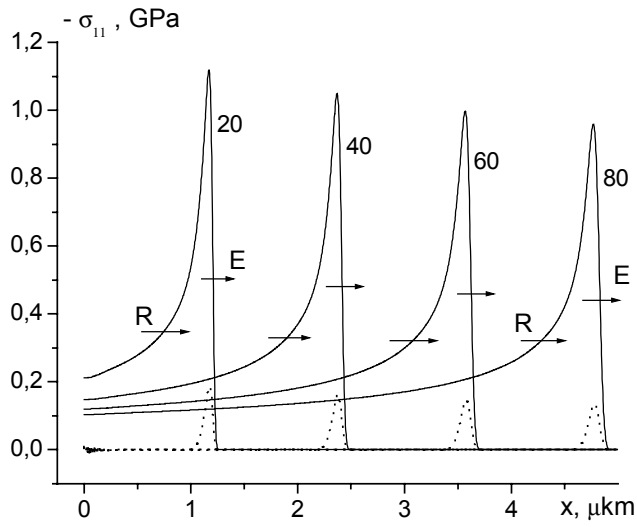


Рис 3 а)

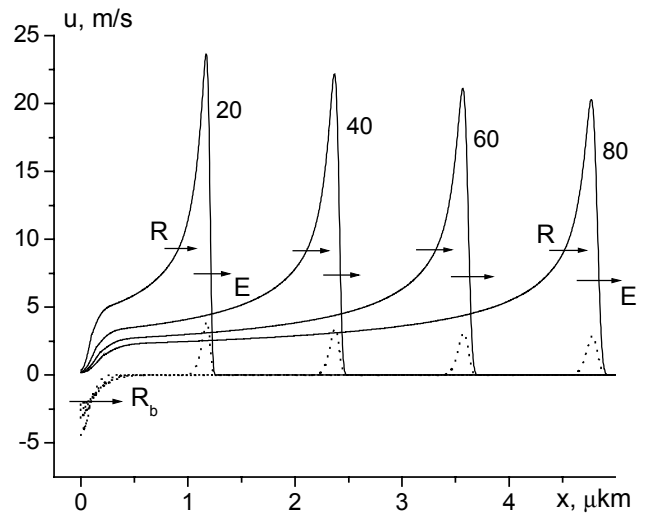


Рис 3 б)

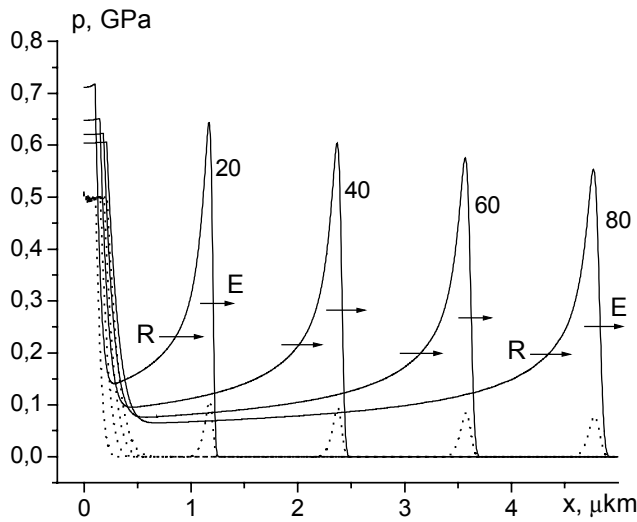


Рис 3 с)

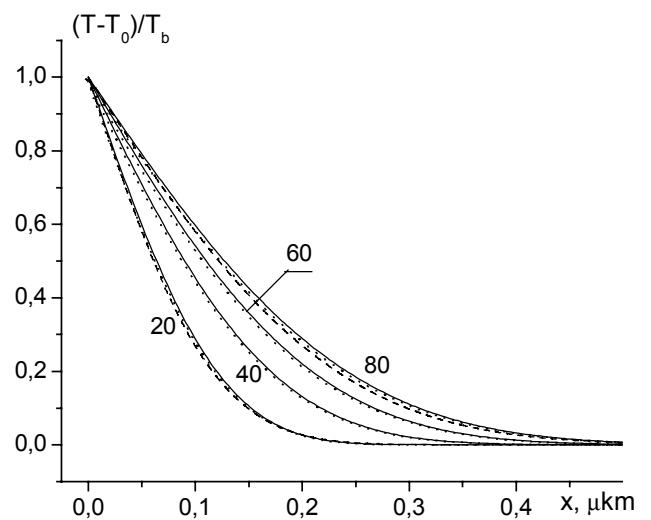


Рис 3 д)

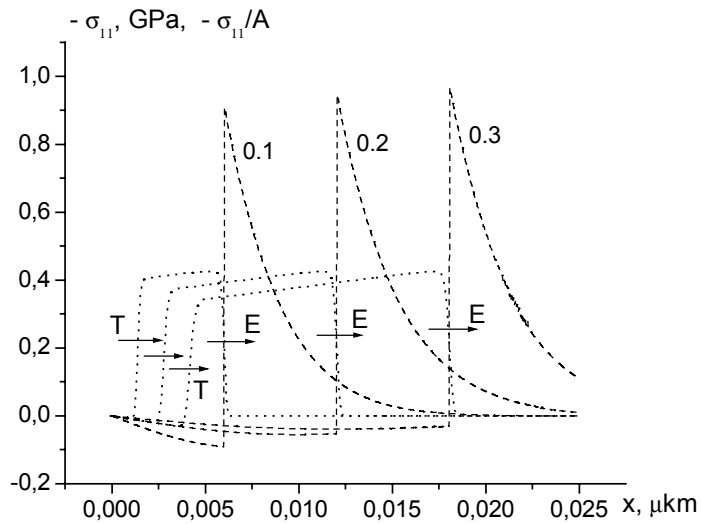


Рис 4