ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

А. Б. Смышляев, Д. А. Терешко
Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия
e-mail: smis@ifit.phys.dvgu.ru

In this work we considered the boundary value problems for the stationary heat and mass transfer equations under the common non-standard boundary conditions for velocity and mixed boundary conditions for the temperature and concentration. The global solvability of this problems is proved.

1. Постановка краевых задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbf{R}^d$, $d = 2,3$ с липшицевой границей Γ. Предположим, что существуют открытые непересекающиеся подмножества Γ_1, Γ_2 и Γ_3, а также Γ_D и Γ_N либо Γ_D^c и Γ_N^c границы Γ такие, что $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$ и $\Gamma = \overline{\Gamma_D^c} \cup \overline{\Gamma_N^c}$.

Будем рассматривать ниже краевую задачу

$$\nu \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{u} + (\beta_T T - \beta_C C)\mathbf{G} = \mathbf{f} - \mathrm{grad} r \text{ в } \Omega, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\lambda \Delta T + \mathbf{u} \cdot \mathrm{grad} T = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$-\lambda_c \Delta C + \mathbf{u} \cdot \mathrm{grad} C - w_0 \frac{\partial C}{\partial z} + kC = f_c \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \ \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ и } p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = g \text{ на } \Gamma_2, \tag{4}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ и } \mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ на } \Gamma_3, \tag{5}$$

$$T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Gamma_N, \tag{6}$$

$$C = 0 \text{ на } \Gamma_D^c, \ \lambda_c \frac{\partial C}{\partial n} = \chi_c \text{ на } \Gamma_N^c, \tag{7}$$

описывающую процесс тепломассопереноса в вязкой жидкости, занимающей область Ω.

Здесь $\mathbf{u}$, T и C — скорость, температура и концентрация вещества (примеси) соответственно, функция $r = p + (1/2)|\mathbf{u}|^2$ имеет смысл полного напора; $\nu = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент температуропроводности, $\lambda_c = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент диффузии, $\mathbf{f}$ — объемная плотность внешних сил, f — объемная плотность источников тепла, f_c — объемная плотность источников массы, $w_0 = \mathrm{const} \geq 0$ — скорость вертикального осаждения вещества, $\mathbf{G} = -(0,0,G)$ — ускорение свободного падения (ось z декартовой системы координат направлена вверх), $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; β_T, β_C, k, g, $\mathbf{h}$, χ и χ_c — заданные функции.

Ниже будем ссылаться на задачу (1)–(7) для заданных $\mathbf{f}$, f, f_c, β_T, β_C, g, $\mathbf{h}$, χ и χ_c как на задачу 1.

Отметим, что граничные условия в (4), (5) на участках Γ_2 и Γ_3 границы Γ относятся к классу так называемых *нестандартных* граничных условий для скорости $\mathbf{u}$. В большинстве работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнений Навье — Стокса, последние рассматриваются при классических граничных условиях $\mathbf{u} = 0$ или $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ на Γ (см., например, [4, 10]).

Что касается нестандартных граничных условий, то первые результаты о разрешимости соответствующих краевых задач для системы уравнений Навье — Стокса можно найти в работах Кажихова А. В. и Рагулина В. В. (см. [3, 5]). Далее, в работах O. Pironneau и Bégue et al. (см. [8, 11]) были сформулированы общие нестандартные граничные условия для систем Навье — Стокса и Стокса. В общем случае эти граничные условия совпадают с граничными условиями (4), (5).

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (коды проектов 99–01–00214, 01–01–06067, 01–01–06070).

Детальное исследование разрешимости соответствующих краевых задач было выполнено в недавно вышедшей работе Conca et al. [9]. Кроме того, авторы статьи [9] указали ряд физических ситуаций, приводящих к необходимости решения данных задач.

Указанные результаты получены в [9] для двух типов областей. К первому типу относятся гладкие (в общем случае невыпуклые и неодносвязные) области с границей из класса $C^{1,1}$. Ко второму типу относятся выпуклые многогранники.

Наконец, упомянем работы Г. В. Алексеева, Д. А. Терешко и А. Б. Смышляева [1, 6, 7], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для системы уравнений Обербека — Буссинеска.

В этих работах доказана глобальная разрешимость соответствующих однородных краевых задач, а также теоремы локальной разрешимости и единственности для неоднородной задачи (1), (2), (4)–(6).

Основной целью данной работы является изучение вопросов существования и единственности решения задачи 1.

В следующем пункте этого раздела мы введем функциональные пространства, которые потребуются нам в дальнейшем и приведем три леммы о разрешимости линейных эллиптических задач, связанных с задачей 1. В §2 мы докажем глобальную разрешимость задачи 1 при некоторых ограничениях на исходные данные, не имеющих смысл их малости.

2. Предварительные сведения. Функциональные пространства

Введем следующие ограничения на область Ω и разбиения $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ границы Γ:

(i) Ω — связная ограниченная область в пространстве $\mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$ с границей $\Gamma \in C^{1,1}$ либо Ω — выпуклый многогранник;

(ii) открытые участки Γ_1, Γ_2, Γ_3 границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_1 \neq \emptyset$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, $\Gamma_j \in C^{1,1}$, $j = 1, 2, 3$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 \cup \overline{\Gamma}_3$, $\overline{\Gamma}_2 \cap \overline{\Gamma}_3 = \emptyset$.

Кроме того, будем предполагать аналогично [7], что

(iii) открытые участки Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_D \neq \emptyset$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, Γ_D, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$, $\Gamma_N \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_3$;

(iv) открытые участки Γ_D^c и Γ_N^c границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_D^c \neq \emptyset$, $\Gamma_D^c \cap \Gamma_N^c = \emptyset$, Γ_D^c, $\Gamma_N^c \in C^{0,1}$, $\Gamma = \overline{\Gamma_D^c} \cup \overline{\Gamma_N^c}$, $\Gamma_N^c \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_3$.

В дальнейшем будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbf{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω либо границу Γ, либо соответствующую часть Γ_0 границы Γ с положительной мерой. При $s = 0$ получаем пространство $H^0(D) = L^2(D)$. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$. Так, например, $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^d$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$. При $s = 0$ имеем

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 = \|\psi\|^2 \equiv \int\limits_\Omega \psi^2 d\Omega,$$

$$\|\psi\|_{0,\Gamma}^2 = \|\psi\|_\Gamma^2 \equiv \int\limits_\Gamma \psi^2 d\sigma,$$

$$\|\psi\|_{\Gamma_0}^2 = \int\limits_{\Gamma_0} \psi^2 d\sigma.$$

Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ и $\mathbf{L}^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, скалярное произведение в $L^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma_0)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо через $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$. Через $(\cdot,\cdot)_1$, $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать скалярное произведение, норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ соответственно.

Соотношение двойственности между произвольным гильбертовым или банаховым пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $< \cdot,\cdot >_{X^* \times X}$ либо просто через $< \cdot,\cdot >$.

Положим $L^2_+(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \varphi \geq 0 \text{ в } \Omega\}$.

Ниже будем широко использовать линейные непрерывные операторы следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma), \gamma|_{\Gamma_0} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_0)$. Для упрощения обозначений будем часто записывать $\varphi|_\Gamma$, $\varphi|_{\Gamma_0}$ либо $\mathbf{u}|_\Gamma$, $\mathbf{u}|_{\Gamma_0}$ вместо $\gamma\varphi$, $\gamma|_{\Gamma_0}\varphi$ либо $\gamma\mathbf{u}$, $\gamma|_{\Gamma_0}\mathbf{u}$ или просто φ и $\mathbf{u}$, если это не приведет к путанице.

На протяжении всей работы будем использовать неравенства

$$\|S\|_{L^q(\Omega)} \leq c_q \|S\|_1 \ \ \forall S \in H^1(\Omega), \ \ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)} \leq c_q \|\mathbf{v}\|_1 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \ \ 1 \leq q \leq 6, \tag{8}$$

$$||S||_{L^q(\Gamma)} \leq \tilde{c}_q ||S||_1 \ \ \forall S \in H^1(\Omega), \ \ ||\mathbf{v}||_{\mathbf{L}^q(\Gamma)} \leq \tilde{c}_q ||\mathbf{v}||_1 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \ \ 1 \leq q \leq 4, \tag{9}$$

являющиеся следствиями теорем вложения.

Как и в [9], введем следующее функциональное пространство

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \ \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = 0, \ \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = 0, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_3} = 0\},$$

наделенное скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_1$ пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Из условий (i), (ii) вытекает, что $\mathbf{W}$ — гильбертово пространство с гильбертовой нормой $||\mathbf{v}||_1 = (\mathbf{v},\mathbf{v})_1^{1/2}$. Более того, $||\cdot||_1$ эквивалентна норме $||\cdot||_{\mathbf{W}}$, определяемой формулой $||\mathbf{v}||^2_{\mathbf{W}} = ||\mathrm{rot}\mathbf{v}||^2$. Это вытекает из следующего результата.

Предложение. *При выполнении условий (i), (ii) билинейная форма $a : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, определяемая формулой*

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathrm{rot}\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{v} d\Omega, \tag{10}$$

непрерывна и коэрцитивна на $\mathbf{W}$, т.е.

$$|a(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq c_r ||\mathbf{u}||_1 ||\mathbf{v}||_1 \ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \ a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha_0 ||\mathbf{v}||_1^2 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \tag{11}$$

Здесь постоянные c_r и α_0 зависят от Ω и от Γ_1, Γ_2, Γ_3.

Пусть $\hat{a} : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ — произвольная билинейная непрерывная форма, удовлетворяющая следующему условию

$$\hat{a}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \tag{12}$$

Обозначим через $\mathbf{W}^*$ двойственное к $\mathbf{W}$ пространство с двойственной нормой. Рассмотрим вариационную задачу, заключающуюся в нахождении такого вектора $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, что

$$\nu a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \hat{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = <\mathbf{l},\mathbf{v}>_{\mathbf{W}^* \times \mathbf{W}} \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \ \ \mathbf{l} \in \mathbf{W}^*. \tag{13}$$

Следующий результат вытекает из (11), (12) и теоремы Лакса-Мильграма.

Лемма 1. *Пусть при выполнении условий (i), (ii) билинейная форма $a : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ определяется формулой (10), а непрерывная билинейная форма $\hat{a} : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет (12). Тогда:*

1) билинейная форма $\nu a + \hat{a} : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ непрерывна и коэрцитивна на $\mathbf{W}$ с константой коэрцитивности $\alpha_0\nu$;

2) задача (13) имеет единственное решение $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ для любого $\mathbf{l} \in \mathbf{W}^*$ и справедлива следующая оценка

$$||\mathbf{u}||_1 \leq (1/\alpha_0\nu)||\mathbf{l}||_{\mathbf{W}^*}.$$

Используя приведенные выше функциональные пространства, введем следующие билинейные и трилинейные формы: $c : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega) \to \mathbf{R}$, $b_i : H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, $i = 1,2$, $\tilde{a} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, и $\tilde{c} : \mathbf{L}^4(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, определяемые формулами

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega (\mathrm{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Omega, \ \ b_i(S,\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v} S d\Omega, \ i = 1,2,$$

$$\tilde{a}(T,S) = \int_\Omega \nabla T \cdot \nabla S d\Omega, \ \tilde{c}(\mathbf{u},T,S) = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla T) S d\Omega. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{b}_1 = \beta_T \mathbf{G}$, $\mathbf{b}_2 = \beta_C \mathbf{G}$. Введенные формы непрерывны. В частности, справедливы следующие оценки:

$$|\tilde{c}(\mathbf{u},S,T)| \leq c' ||\mathbf{u}||_1 ||S||_1 ||T||_{L^4(\Omega)} \ \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \ S \in H^1(\Omega), \ T \in L^4(\Omega),$$

$$|\tilde{c}(\mathbf{u},T,S)| \leq c'' ||\mathbf{u}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)} ||T||_1 ||S||_1 \ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{L}^4(\Omega), \ T,S \in H^1(\Omega). \tag{15}$$

Здесь и ниже постоянные c', c'', c''' зависят от Ω. Справедливы также следующие соотношения

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -c(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}), \ c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{16}$$

Используя известную формулу $\mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w}$ и формулу Грина (см. [10, с. 34]), имеем

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \equiv \int\limits_\Omega \mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})d\Omega = \int\limits_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})d\Omega - <\mathbf{u}\times\mathbf{n},(\mathbf{v}\times\mathbf{w})>_\Gamma =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathbf{u}[(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w}]d\Omega - \int\limits_\Gamma (\mathbf{u}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})d\Gamma \ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1(\Omega). \tag{17}$$

Из (17), (8) и (9) легко выводим следующую оценку для $c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$:

$$|c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})| \le c'''(||\mathbf{u}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + ||\mathbf{u}||_{\mathbf{L}^3(\Gamma)})||\mathbf{v}||_1||\mathbf{w}||_1 \ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1(\Omega). \tag{18}$$

Ниже мы будем использовать следующие подпространства пространства $H^1(\Omega)$:

$$\mathcal{T} = H^1(\Omega,\Gamma_D) \equiv \{S\in H^1(\Omega):\ \gamma|_{\Gamma_D}S = 0\},\ \ \mathcal{C} = H^1(\Omega,\Gamma_D^c)$$

с нормой $||\cdot||_1$. Обозначим через $\mathcal{T}^*$ и $\mathcal{C}^*$ двойственные пространства к пространствам $\mathcal{T}$ и $\mathcal{C}$ соответственно со стандартными двойственными нормами.

Простой анализ с учетом условий $\Gamma_N \subseteq \Gamma_1\cup\Gamma_3$ в (iii) либо $\Gamma_N^c \subseteq \Gamma_1\cup\Gamma_3$ в (iv) показывает, что для любой вектор-функции $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$

$$\tilde{c}(\mathbf{w},T,S) = -\tilde{c}(\mathbf{w},S,T),\ \ \tilde{c}(\mathbf{w},S,S) = 0\ \ T\in H^1(\Omega),\ S\in\mathcal{T}\ (\text{либо } S\in\mathcal{C}). \tag{19}$$

С другой стороны, из определения формы $\tilde{a}$ в (14) и неравенства Фридрихса-Пуанкаре́ вытекает, что

$$||S||_1 \le c_P|S|_1\ \ \forall S\in\mathcal{T},\ \ ||h||_1 \le c_P^c|h|_1,\ \ c_P = \mathrm{const},\ \ c_P^c = \mathrm{const},$$

$$\tilde{a}(S,S) = |S|_1^2 \ge \alpha_1||S||_1^2\ \ \forall S\in\mathcal{T},\ \ \alpha_1 = \frac{1}{(c_P)^2},\ \ \tilde{a}(h,h) = |h|_1^2 \ge \alpha_2||h||_1^2\ \ \forall h\in\mathcal{C},\ \alpha_2 = \frac{1}{(c_P^c)^2}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что билинейная форма $\tilde{a}$ является коэрцитивной на $\mathcal{T}$ (либо на $\mathcal{C}$). Полагая

$$a_1(T,S) \equiv \lambda\tilde{a}(T,S),\ \ c_1 = \tilde{c}|_{\mathbf{L}^4(\Omega)\times H^1(\Omega)\times\mathcal{T}}, \tag{21}$$

рассмотрим задачу нахождения такой функции $T\in\mathcal{T}$, что

$$a_1(T,S) + c_1(\mathbf{u}+\mathbf{w},T,S) = <l,S>_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}}\ \ \forall S\in\mathcal{T}. \tag{22}$$

Лемма 2. *Предположим, что выполняются условия (i)–(iii), причем* $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. *Тогда:*

1) форма $a_1(\cdot,\cdot) + c_1(\mathbf{u}+\mathbf{w},\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbf{R}$ *в (22) непрерывна и коэрцитивна на* $\mathcal{T}$ *с константой* $\alpha_1\lambda$*;*

2) задача (22) имеет единственное решение $T\in\mathcal{T}$ *для любого* $l\in\mathcal{T}^*$ *и справедлива оценка* $||T||_1 \le (1/\alpha_1\lambda)||l||_{\mathcal{T}^*}$.

Аналогично, полагая

$$a_2(C,h) \equiv \lambda_c\tilde{a}(C,h) - w_0(\frac{\partial C}{\partial z},h) + (kC,h),\ \ c_2 = \tilde{c}|_{\mathbf{L}^4(\Omega)\times H^1(\Omega)\times\mathcal{C}}, \tag{23}$$

рассмотрим вариационную задачу нахождения такой функции $C\in\mathcal{C}$, что

$$a_2(C,h) + c_2(\mathbf{u}+\mathbf{w},C,h) = <l_c,h>_{\mathcal{C}^*\times\mathcal{C}}\ \ \forall h\in\mathcal{C}. \tag{24}$$

Лемма 3. *Предположим, что выполняются условия (i), (ii), (iv), причем* $\lambda_* \equiv \lambda_c\alpha_2 - |w_0| > 0$, $k\in L_+^2(\Omega)$, $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$. *Тогда:*

1) форма $a_2(\cdot,\cdot) + c_2(\mathbf{u}+\mathbf{w},\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbf{R}$ *в (24) непрерывна и коэрцитивна на* $\mathcal{C}$ *с константой* λ_**;*

2) задача (24) имеет единственное решение $C\in\mathcal{C}$ *для любого* $l_c\in\mathcal{C}^*$ *и справедлива оценка* $||C||_1 \le (1/\lambda_*)||l_c||_{\mathcal{C}^*}$.

3. Глобальная разрешимость краевой задачи

В этом параграфе мы докажем глобальную теорему существования слабого решения краевой задачи (1)-(7). Положим

$$\beta_1 = \sup_{T\in H^1(\Omega),\mathbf{v}\in\mathbf{W}} \frac{|b_1(T,\mathbf{v})|}{\|T\|_1\|\mathbf{v}\|_1},\ \beta_2 = \sup_{C\in H^1(\Omega),\mathbf{v}\in\mathbf{W}} \frac{|b_2(C,\mathbf{v})|}{\|C\|_1\|\mathbf{v}\|_1},\ k_1 = \sup_{C,h\in H^1(\Omega)} \frac{|(kC,h)|}{\|C\|_1\|h\|_1}. \tag{25}$$

Пусть в дополнение к (i) – (iv) выполняются следующие условия: (v) $\mathbf{f}\in\mathbf{W}^*$, $\mathbf{h}\in\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma_3)$, $g\in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, $\mathbf{b}_1\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{b}_2\in\mathbf{L}^2(\Omega)$;

(vi) $0\le\beta_1<\infty$, $f\in L^2(\Omega)$, $\chi\in H^{-1/2}(\Gamma_N)$;

(vii) $0\le\beta_2<\infty$, $\lambda_*\equiv\lambda_c\alpha_1^c-|w_0|>0$, $k\in L^2_+(\Omega)$, $f_c\in L^2(\Omega)$, $\chi_c\in H^{-1/2}(\Gamma_N^c)$;

Определение. Тройка $(\mathbf{u},T,C)\in\mathbf{W}\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$, удовлетворяющая условиям

$$\nu a(\mathbf{u},\mathbf{v})+c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = <\mathbf{l},\mathbf{v}> - b_1(T,\mathbf{v})+b_2(C,\mathbf{v})\ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}, \tag{26}$$

$$a_1(T,S)+c_1(\mathbf{u},T,S) = <l,S>\ \ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{27}$$

$$a_2(C,h)+c_2(\mathbf{u},C,h) = <l_c,h>\ \ \forall h\in\mathcal{C}, \tag{28}$$

называется слабым решением задачи 1.

Здесь функционалы $\mathbf{l}:\mathbf{W}\to\mathbf{R}$, $l:\mathcal{T}\to\mathbf{R}$ и $l_c:\mathcal{C}\to\mathbf{R}$ определяются формулами

$$<\mathbf{l},\mathbf{v}> = <\mathbf{f},\mathbf{v}>_{\mathbf{W}^*\times\mathbf{W}} - <g,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}>_{\Gamma_2} + \nu<\mathbf{h},\mathbf{v}_T>_{\Gamma_3},$$

$$<l,S> = <f,S>_{\mathcal{T}^*\times\mathcal{T}} + <\chi,S>_{\Gamma_N},\ \ <l_c,h> = <f_c,h>_{\mathcal{C}^*\times\mathcal{C}} + <\chi_c,h>_{\Gamma_N^c}\,. \tag{29}$$

Рассуждая, как в [9], легко показываем, что $\mathbf{l}\in\mathbf{W}^*$, причем с некоторыми константами c_{Γ_1} и c_{Γ_2} справедлива оценка

$$|<\mathbf{l},\mathbf{v}>|\le(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^*}+c_{\Gamma_2}\|g\|_{-1/2,\Gamma_2}+\nu c_{\Gamma_3}\|\mathbf{h}\|_{-1/2,\Gamma_3})\|\mathbf{v}\|_1\equiv M_{\mathbf{u}}\|\mathbf{v}\|_1\ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}.$$

Точно так же $l\in\mathcal{T}^*$, $l_c\in\mathcal{C}^*$, причем

$$|<l,S>|\le(\|f\|_{\mathcal{T}^*}+c_\Gamma\|\chi\|_{-1/2,\Gamma_N})\|S\|_1\equiv M_T\|S\|_1\ \ \forall S\in\mathcal{T},$$

$$|<l_c,h>|\le(\|f_c\|_{\mathcal{C}^*}+c_\Gamma\|\chi_c\|_{-1/2,\Gamma_N^c})\|h\|_1\equiv M_C\|h\|_1\ \ \forall h\in\mathcal{C}.$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$\|\mathbf{l}\|_{\mathbf{W}^*}\le M_{\mathbf{u}},\ \ \|l\|_{\mathcal{T}^*}\le M_T,\ \ \|l_c\|_{\mathcal{C}^*}\le M_C. \tag{30}$$

Стандартным образом (см., например, [2]) доказываются следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия (i) – (iv). Если четверка* $(\mathbf{u},p,T,C)\in\mathbf{C}^2(\overline{\Omega})\times C^1(\overline{\Omega})\times C^2(\overline{\Omega})\times C^2(\overline{\Omega})$ *является классическим решением задачи 1, то тройка* $(\mathbf{u},T,C)$ *принадлежит* $\mathbf{W}\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ *и удовлетворяет (26) – (28).*

Лемма 5. *Пусть выполняются условия (i) – (vii),* $\mathbf{f}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ *и пусть* $(\mathbf{u},T,C)\in\mathbf{W}\times\mathcal{T}\times\mathcal{C}$ *— решение задачи (26) – (28). Тогда существует такая функция* $r\in L^2(\Omega)/\mathbf{R}$, *что* $(\mathbf{u},r,T,C)$ *является решением задачи 1 в следующем смысле*

$$\nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{u}+\mathrm{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{u}+\mathbf{b}_1T-\mathbf{b}_2C=\mathbf{f}-\mathrm{grad}r\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(\Omega)^d,$$

$$-\lambda\Delta T+\mathbf{u}\cdot\nabla T=f\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$-\lambda_c\Delta C+\mathbf{u}\cdot\nabla C-w_0\frac{\partial C}{\partial z}+kC=f_c\ \text{ в }\ \mathcal{D}'(\Omega),$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0\ \text{ в }\ \Omega,\ \ \mathbf{u}=0\ \text{ на }\ \Gamma_1,\ \ \mathbf{u}\times\mathbf{n}=0\ \text{ на }\ \Gamma_2,\ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0\ \text{ на }\ \Gamma_3,$$

$$T=0\ \text{ на }\ \Gamma_D,\ \ C=0\ \text{ на }\ \Gamma_D^c.$$

Если, более того, выполняются условия

(viii) $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Delta,\Omega)$, $r\in H^1(\Omega)$,

то функции $\mathbf{u}$, r, T *и* C *удовлетворяют следующим граничным условиям:*

$$S^*|_{\Gamma_2} r = g \text{ в } H^{-1/2}(\Gamma_2)/\mathbf{R}, \ \ S^*|_{\Gamma_3}(\mathrm{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{n}) = \mathbf{h} \text{ в } \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma_3), \tag{31}$$

$$\lambda S^*|_{\Gamma_N}\frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ в } H^{-1/2}(\Gamma_N), \ \ \lambda_c S^*|_{\Gamma_N^c}\frac{\partial C}{\partial n} = \chi_c \text{ в } H^{-1/2}(\Gamma_N^c).$$

Для доказательства существования решения задачи (26) – (28) воспользуемся теоремой Шаудера. Для этого введем отображение $F : \mathbf{W}\to\mathbf{W}$, действующее по формуле $F(\mathbf{w}) = \mathbf{z}$. Здесь $\mathbf{z}$ — решение линейной задачи

$$\nu a(\mathbf{z},\mathbf{v}) + c(\mathbf{w},\mathbf{z},\mathbf{v}) = <\mathbf{l},\mathbf{v}> - b_1(T,\mathbf{v}) + b_2(C,\mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}, \tag{32}$$

где $T\in\mathcal{T}$ и $C\in\mathcal{C}$ — решения соответственно задач (27) и (28).

Ясно, что отображение F определено корректно. Действительно, в силу леммы 2 существует единственное решение $T\in\mathcal{T}$ задачи (27), причем для любой функции $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ справедлива оценка

$$||T||_1 \le M_1 \equiv \frac{1}{\alpha_1\lambda}M_T.$$

Аналогично в силу леммы 3 существует единственное решение $C\in\mathcal{C}$ задачи (28) и для любой функции $\mathbf{w}\in\mathbf{W}$ справедлива оценка

$$||C||_1 \le M_2 \equiv \frac{1}{\lambda_*}M_C.$$

Обратимся теперь к задаче (32). Для правой части (32) имеем в силу (25) и (30), что

$$|<\mathbf{l},\mathbf{v}> - b_1(T,\mathbf{v}) + b_2(C,\mathbf{v})| \le [M_\mathbf{u} + \beta_1||T||_1 + \beta_2||C||_1]||\mathbf{v}||_1 \ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}.$$

Далее выводим на основании леммы 1, что задача (32) имеет единственное решение $\mathbf{z}\in\mathbf{W}$ и выполняется оценка

$$||\mathbf{z}||_1 \le M_3 \equiv \frac{1}{\alpha_0\nu}[M_\mathbf{u} + \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2]. \tag{33}$$

Полагая $r = M_3$, введем шар $B_r = \{\mathbf{w}\in\mathbf{W} : \ ||\mathbf{w}||_1 \le r\}$ в пространстве $\mathbf{W}$. Из (33) вытекает, что отображение F отображает шар B_r в себя.

Докажем, что F компактно и непрерывно на B_r. Пусть $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность из B_r. В силу рефлексивности пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложений $\mathbf{H}^1(\Omega)\subset\mathbf{L}^4(\Omega)$ и $\gamma(\mathbf{H}^1(\Omega))\subset\mathbf{L}^3(\Gamma)$ существует подпоследовательность $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^\infty$, которую мы опять обозначим через $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^\infty$, и функция $\mathbf{w}\in B_r$ такие, что $\mathbf{w}_k\to\mathbf{w}$ слабо в $\mathbf{W}$, $\mathbf{w}_k\to\mathbf{w}$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, $\gamma\mathbf{w}_k\to\gamma\mathbf{w}$ сильно в $\mathbf{L}^3(\Gamma)$ при $k\to\infty$. Положим $T_k = T_{\mathbf{w}_k}$, $C_k = C_{\mathbf{w}_k}$, $\mathbf{z}_k = F(\mathbf{w}_k)$, $T = T_\mathbf{w}$, $C = C_\mathbf{w}$, $\mathbf{z} = F(\mathbf{w})$.

Докажем, что $T_k\to T$, $C_k\to C$ сильно в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{z}_k\to\mathbf{z}$ сильно в $\mathbf{W}$ при $k\to\infty$. Подставляя функции $\mathbf{w}_k$, T_k, C_k и $\mathbf{z}_k$ в (27), (28), (32) вместо $\mathbf{w}$, T, C и $\mathbf{z}$, получим

$$\nu a(\mathbf{z}_k,\mathbf{v}) + c(\mathbf{w}_k,\mathbf{z}_k,\mathbf{v}) = <\mathbf{l},\mathbf{v}> - b_1(T_k,\mathbf{v}) + b_2(C_k,\mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}, \tag{34}$$

$$a_1(T_k,S) + c_1(\mathbf{w}_k,T_k,S) = <l,S> \ \ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{35}$$

$$a_2(C_k,h) + c_2(\mathbf{w}_k,C_k,h) = <l_c,h> \ \ \forall h\in\mathcal{C}. \tag{36}$$

После вычитания (32) из (34), (27) из (35) и (28) из (36), получаем

$$\nu a(\mathbf{z}_k-\mathbf{z},\mathbf{v}) + c_(\mathbf{w},\mathbf{z}_k-\mathbf{z},\mathbf{v}) = -c(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},\mathbf{z}_k,\mathbf{v}) - b_1(T_k-T,\mathbf{v}) + b_2(C_k-C,\mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{W}, \tag{37}$$

$$a_1(T_k-T,S) + c_1(\mathbf{w},T_k-T,S) = -c_1(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},T_k,S) \ \ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{38}$$

$$a_2(C_k-C,h) + c_2(\mathbf{w},C_k-C,h) = -c_2(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},C_k,h) \ \ \forall h\in\mathcal{C}. \tag{39}$$

Используя вторую оценку в (15) для формы c_1 и оценку (30), которая имеет место и для T_k, получаем, что

$$|c_1(\mathbf{w}_k-\mathbf{w},T_k,S)| \le c''||\mathbf{w}_k-\mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)}||T_k||_1||S||_1 \le c'' M_T||\mathbf{w}_k-\mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)}||S||_1. \tag{40}$$

Применяя лемму 2 к задаче (38) относительно $T_k - T$, выводим с учетом (40), что

$$||T_k-T||_1 \le \frac{c''}{\alpha_1\lambda}M_T||\mathbf{w}_k-\mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)}||S||_1. \tag{41}$$

Из (41) следует, что $T \to T$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $k \to \infty$.

Аналогично, используя (15) и оценку (30) для C_k, имеем

$$|c_2(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}, C_k, h)| \leq c''||\mathbf{w}_k - \mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)}||C_k||_1||h||_1 \leq c''||\mathbf{w}_k - \mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)}M_C||h||_1. \quad (42)$$

Применяя лемму 3 к задаче (39), приходим к выводу, что $C_k \to C$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $k \to \infty$.

Наконец, используя оценку (18) для формы c и оценку $||\mathbf{z}_k||_1 \leq M_3$ для $k = 1, 2, ...$, имеем, что

$$|c(\mathbf{w}_k - \mathbf{w}, \mathbf{z}_k, \mathbf{v}) + b_1(T_k - T, \mathbf{v}) - b_2(T_k - C, \mathbf{v})| \leq$$

$$\leq [c'''(||\mathbf{w}_k - \mathbf{w}||_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + ||\mathbf{w}_k - \mathbf{w}||_{\mathbf{L}^3(\Gamma)})M_3 + \beta_1||T_k - T||_1 + \beta_2||C_k - C||_1]||\mathbf{v}||_1.$$

Применяя лемму 1 к задаче (37) относительно $\mathbf{z}_k - \mathbf{z}$, выводим, что $||\mathbf{z}_k - \mathbf{z}||_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Тем самым, доказаны компактность и непрерывность отображения F на шаре B_r. В таком случае из теоремы Шаудера следует, что отображение F имеет по крайней мере одну неподвижную точку $\mathbf{w} = F(\mathbf{w}) \in \mathbf{W}$. Эта точка $\mathbf{w}$ вместе с соответствующими функциями $T_\mathbf{w} \in \mathcal{T}$ и $C_\mathbf{w} \in \mathcal{C}$, которые являются решением задач (27) и (28) соответственно, является решением задачи (26) – (28).

Доказанные выше факты сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема. *Пусть выполняются условия (i) – (vii). Тогда существует по крайней мере одно слабое решение* $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{W} \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ *задачи 1 и справедливы оценки*

$$||T||_1 \leq \frac{1}{\alpha_1\lambda}M_T, \quad ||C||_1 \leq \frac{1}{\lambda_*}M_C, \quad ||\mathbf{u}||_1 \leq \frac{1}{\alpha_0\nu}[\frac{\beta_1}{\alpha_1\lambda}M_T + \frac{\beta_2}{\lambda_*}M_C + M_\mathbf{u}].$$

В частном случае, когда $f_c = 0$ в Ω и $\chi_c = 0$ на Γ_N^c, мы получаем, что $C = 0$ и представленные здесь результаты согласуются с результатами работ [1, 6]. Более сложного исследования требует случай неоднородных граничных условий для скорости, температуры и концентрации. Этому будет посвящены следующие работы авторов.

Список литературы

[1] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Стационарные задачи оптимального управления для уравнений гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Сибирский журнал индустриальной математики. 1998. Т. 1, 2. С. 24–44.

[2] Алексеев Г. В., Смышляев А. Б., Терешко Д. А. Неоднородные краевые задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса. Препринт 19 ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 2000.

[3] Кажихов А. В. Разрешимость некоторых односторонних краевых задач для уравнений Навье — Стокса. Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР, Новосибирск. 1974. Т. 16. С. 5–34.

[4] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

[5] Рагулин В. В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора. Динамика сплошной среды. ИГ СО АН СССР, Новосибирск. 1976. Т. 27. С. 78–92.

[6] Alekseev G. V., Tereshko D. A. On solvability of inverse extremal problem for stationary equations of viscous heat conducting fluid // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. Vol. 6. P. 521–562.

[7] Alekseev G. V., Smishliaev A. B. Solvability of the boundary-value problems for the Boussinesq equations with inhomogeneous boundary conditions // J. of Mathematical Fluid Mechanics. 2001 (to apear).

[8] Bègue C., Conca C., Murat F., Pironneau O. A nouveau sur les équations de Stokes et de Navier — Stokes avec des conditions aux limites sur la pression. C. R. Acad. Sci. Série I. Paris. 1987. Vol. 304. P 23–28.

[9] Conca C., Murat F., Pironneau O. The Stokes and Navier — Stokes equations with boundary conditions involving the pressure // Japan. J. Math. 1994. Vol. 20. P. 279–318.

[10] Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier — Stokes equations. Theory and algorithms. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[11] Pironneau O. Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes et de Navier — Stokes // C. R. Acad. Sci., Série I. Paris. 1986. Vol. 303. P. 403–406.