ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОБНАРУЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ ПРИМЕСИ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Э. А. Адомавичюс
Институт Прикладной Математики ДВО РАН, Россия
e-mail: eduard@iam-mail.febras.ru

This work deals with extremal problems for the stationary equations of mass transfer considered under homogeneous Dirichlet condition for velocity and the mixed boundary conditions for concentration. These problems consist of finding of unknown pollutant sources under the certain information about the solution. Solvability and uniqueness of these problems is investigated. The optimality systems for both nonlinear and linear models of distribution of an impurity are deduced and analyzed. In the latter case the simple formula for finding of a minimum linear for concentration cost functional is deduced. The regularity of Lagrange multipliers is proved and sufficient conditions of uniqueness of extremal problems are established in particular case.

Введение

Исследование задач прогноза экологического состояния атмосферы и океана на основе методов математического моделирования сводится к решению начально — краевых задач для уравнений, описывающих распространение примеси. Указанные краевые задачи содержат ряд гидродинамических параметров, а также функций, описывающих плотности источников примесей.

Решение задач защиты окружающей среды от выбросов вредных примесей приводит к необходимости решения математическими методами задач обнаружения неизвестных источников примесей и идентификации их параметров. По своей постановке указанные задачи относятся к классу обратных задач. В строгой математической формулировке они заключаются в нахождении параметров неизвестного источника примеси по измеренной информации о поле концентраций, создаваемом этим источником в некоторой области, а также по определенной информации об источнике.

Наряду с обратными задачами важную роль в приложениях играют экстремальные задачи теории распространения примеси. В этих задачах вводится определенный функционал качества и требуется его минимизировать, например, за счет выбора плотностей источников примесей. Указанные задачи по своим постановкам формулируются аналогично экстремальным задачам теории теплопереноса, рассмотренным в [1, 4, 5, 8, 10] Следует отметить, что решение обратных задач может быть сведено к решению экстремальных задач при соответствующем выборе функционалов качества.

В настоящей работе исследуются экстремальные задачи для следующей модели массопереноса

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{u} + \mathrm{grad}p = \mathbf{f} + \beta C\mathbf{G} \ \text{ в } \ \Omega, \ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \Omega, \ \mathbf{u} = 0 \ \text{ на } \Gamma, \tag{1}$$

$$-\lambda\Delta C + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}C - w_0\frac{\partial C}{\partial z} + \kappa C = f \text{ в } \Omega, \ \ C = \psi \text{ на } \Gamma_D, \ \ \lambda(\frac{\partial C}{\partial n} + \alpha C) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \tag{2}$$

Здесь Ω — ограниченная область из пространства $\mathbf{R}^d$, $d = 2,3$ с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N. Остальные обозначения обычны (см., например, [2]). В частности, $\mathbf{u}$, p и C — скорость, давление и концентрация вещества (субстанции) в жидкости, $\nu > 0$, $\lambda > 0$ — постоянные коэффициенты кинематической вязкости и диффузии, $\mathbf{f}$ и f — объемные плотности источников внешних сил и вещества, $w_0 = \mathrm{const} \geq 0$ — величина вертикальной скорости осаждения вещества, $\mathbf{G} = -(0,0,G)$ — вектор ускорения свободного падения, β, κ, ψ, α и χ — некоторые функции. Ниже на задачу (1) – (2) при заданных функциях $\mathbf{f}$, β, f, κ, α, ψ и χ для краткости будем ссылаться как на Задачу 1.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование экстремальных задач для модели (1), (2). Исследование указанных задач сводится к исследованию задач минимизации определенных функционалов качества на слабых решениях задачи (1), (2). Доказывается разрешимость экстремальных задач, выводятся системы оптимальности и устанавливаются достаточные условия единственности решения экстремальной задачи для конкретного функционала качества.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 99–01–00214).

1. Свойства решений прямой краевой задачи

При изучении экстремальных задач будем использовать слабую формулировку краевой задачи (1)–(2), основанную на применении функциональных пространств Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbf{R}$ и $L^r(D)$, $1 \le r \le \infty$, где D представляет собой либо область Ω, либо границу Γ, либо ее некоторую часть Γ_0 с положительной мерой. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$ и $\mathbf{L}^r(D)$. Скалярные произведения в $L^2(\Omega)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$, скалярные произведения в $L^2(\Gamma)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ — через $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ либо $(\cdot,\cdot)_{\Gamma_0}$, норму в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_0)$ через $\|\cdot\|$ либо $\|\cdot\|_{\Gamma_0}$, норму либо полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ — через $\|\cdot\|_1$ либо $|\cdot|_1$, норму в $H^{1/2}(\Gamma)$ — через $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$, соотношение двойственности для пары X и X^* — через $< \cdot,\cdot >_{X^*\times X}$ или $< \cdot,\cdot >$, там, где это не приведет к путанице.

Пусть выполняются условия:

(i) Ω — ограниченная конечно-связная область в пространстве $\mathbf{R}^d$, $d = 2,3$, с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(i)}$, $i = 1,2,...,N$;

(ii) открытые участки Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma_D \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \ne \emptyset$, $\Gamma_N \in C^{0,1}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma = \overline{\Gamma}_D \cup \overline{\Gamma}_N$.

Хорошо известно, что при выполнении условий (i), (ii) существуют линейные непрерывные операторы следа $\gamma : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma|_{\Gamma_D} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\gamma|_{\Gamma_N} : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_N)$. В частности, с некоторой константой c_Γ справедлива оценка

$$\|\gamma|_{\Gamma_N} S\|_{\Gamma_N} \le c_\Gamma \|S\|_1 \quad \forall S \in H^1(\Omega).$$

Положим $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \mathrm{div}\mathbf{v} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : (p,1) = 0\}$, $\mathcal{C} = H^1(\Omega, \Gamma_D) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S|_{\Gamma_D} = 0\}$, $L_+^\infty(\Gamma_N) = \{\alpha \in L^\infty(\Gamma_N) : \alpha \ge 0\}$, $L_+^2(\Omega) = \{\kappa \in L^2(\Omega) : \kappa \ge 0\}$. Введем билинейные и трилинейные формы:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} d\Omega,\ c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w} d\Omega,\ b(\mathbf{v},q) = -\int_\Omega q \mathrm{div}\mathbf{v} d\Omega,$$

$$\tilde{a}(C,S) = \int_\Omega \nabla C \cdot \nabla S d\Omega,\ c_1(\mathbf{u},C,S) = \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla C) S d\Omega,\ b_1(S,\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{b} S \cdot \mathbf{v} d\Omega,$$

где $\mathbf{b} = \beta\mathbf{G}$. Формы a и $\tilde{a}$ коэрцитивны на $\mathbf{V}$ и $\mathcal{C}$, так что с некоторыми константами $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1 > 0$ выполняются неравенства

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \ge \alpha_0 \|\mathbf{v}\|_1^2 \ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},\ \tilde{a}(S,S) \ge \alpha_1 \|S\|_1^2 \ \forall S \in \mathcal{C}.$$

Положим

$$\beta_1 = \sup_{\substack{S\in H^1(\Omega),\\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}}} \frac{|b_1(S,\mathbf{v})|}{\|S\|_1\|\mathbf{v}\|_1},\quad \mathcal{N} = \sup_{\substack{\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\\ \mathbf{w}\in\mathbf{V}}} \frac{|c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|}{\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1},\quad \mathcal{N}_1 = \sup_{\substack{\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\\ C\in H^1(\Omega), S\in\mathcal{C}}} \frac{|c_1(\mathbf{u},C,S)|}{\|\mathbf{u}\|_1\|C\|_1\|S\|_1}.$$

Предположим в дополнение к условиям (i), (ii), что выполняются условия:

(iii) $\nu > 0$, $\lambda > 0$, $w_0 \ge 0$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$;

(iv) $0 < \beta_1 < \infty$, $\lambda_* \equiv \lambda\alpha_1 - |w_0| > 0$, $\alpha \in L_+^2(\Gamma_N)$, $\kappa \in L_+^\infty(\Omega)$.

Разобьем множество всех исходных данных Задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда для конкретности внесем неизменяемые ниже функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{b}$, а также коэффициенты ν, λ, w_0 и функции α и κ, и группу управлений, куда внесем функции f, ψ и χ, играющие ниже роль управлений. Положим $v_0 = (\nu, \lambda, w_0, \mathbf{f}, \mathbf{b}, \alpha, \kappa)$, $v = (f, \psi, \chi)$ и будем ссылаться на v как на управление. Будем считать, что управление v может изменяться на множестве $K = K_1 \times K_2 \times K_3$, где (v) $K_1 \subset L^2(\Omega)$, $K_2 \subset H^{1/2}(\Gamma_D)$, $K_3 \subset L^2(\Gamma_N)$ — непустые замкнутые выпуклые множества.

Введем билинейную форму $a_1 : H^1(\Omega) \times \mathcal{C} \to \mathbf{R}$ по формуле

$$a_1(C,S) = \lambda\tilde{a}(C,S) + \lambda(\alpha C, S)_{\Gamma_N} - w_0(\frac{\partial C}{\partial z}, S) + (\kappa C, S). \tag{3}$$

Отметим, что при выполнении условий (i)–(iv) форма a_1 в (3) удовлетворяет следующему условию коэрцитивности на $\mathcal{C}$

$$a_1(S,S) \ge \lambda_* \|S\|_1^2 \ \ \forall S \in \mathcal{C}.$$

Полагая $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, p, C)$, $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $Y = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \mathcal{C}^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, введем оператор $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4) : X \times K \to Y$, действующий по формулам

$$< F_1(\mathbf{x}, v), \mathbf{v} >= \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b_1(C, \mathbf{v}) - < \mathbf{f}, \mathbf{v} >, < F_2(\mathbf{x}, v), q >= b(\mathbf{u}, q),$$

$$< F_3(\mathbf{x}, v), S >= a_1(C, S) + c_1(\mathbf{u}, C, S) - < f, S >_{\mathcal{C}^* \times \mathcal{C}} -(\chi, S)_{\Gamma_N},\ F_4(\mathbf{x}, v) = \gamma|_{\Gamma_D} C - \psi.$$

Умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, второе — на функцию $q \in L_0^2(\Omega)$, а уравнение в (2) — на функцию $S \in \mathcal{C}$, проинтегрируем по Ω и воспользуемся граничными условиями в (1)–(2). В результате приходим к слабой формулировке задачи (1)–(2). Она заключается в нахождении такой тройки $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, p, C) \in X$, что

$$F(\mathbf{x}, v) \equiv F(\mathbf{u}, p, C, f, \psi, \chi) = 0. \tag{4}$$

Указанную тройку $(\mathbf{u}, p, C)$ будем называть слабым решением Задачи 1.

Нашей целью является исследование обратных экстремальных задач для модели (1)–(2). При их изучении нам потребуются некоторые результаты о существовании и единственности решения исходной прямой задачи, полученные в [2, 3]. Приведем их без доказательства в виде двух предложений.

Положим

$$\mathcal{M}_{C,\delta} = \frac{1}{\lambda_*}(\|f\|_{\mathcal{C}^*} + c_\Gamma \|\chi\|_{\Gamma_N}) + c_N M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}),\quad æ = \begin{cases} 1 \text{ при } \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} > 0, \\ 0 \text{ при } \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$c_N = 1 + \frac{1}{\lambda_*}\left(\lambda + \lambda c_\Gamma^2 \|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_N)} + w_0 + \|\kappa\|\right). \tag{6}$$

В соотношениях (5) $M_\delta : (0, \infty) \to (0, \infty)$ с $M_\delta(0) = 0$ — семейство непрерывных неубывающих функций, зависящих от параметра $\delta > 0$ (см. более подробно их свойства в [6]).

Предложение 1. *При выполнении условий (i)–(v) для любого элемента $v \in K$ существует слабое решение $(\mathbf{u}, p, C) \in X$ Задачи 1, причем справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \le M_{\mathbf{u}}(v_0, v),\quad \|C\|_1 \le M_C(v_0, v).$$

Здесь $M_{\mathbf{u}}$ и M_C — неубывающие непрерывные функции норм $\|f\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} > 0$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, определяемые формулами

$$M_{\mathbf{u}}(v_0, v) \equiv \frac{2\beta_1}{\alpha_0 \nu}(1 + æ)\mathcal{M}_{C,\delta_0} + \frac{2}{\alpha_0 \nu}(1 + æ)\|\mathbf{f}\|_{-1}, M_C(v_0, v) \equiv (1 + æ)\mathcal{M}_{C,\delta_0} + \frac{æ}{\beta_1}\|\mathbf{f}\|_{-1},$$

где константа δ_0 зависит от Ω, ν, λ_* и β_1.

Введем обобщенные число Рейнольдса Re и диффузионное число Рэлея Ra:

$$\mathrm{Re}(v_0, v) = \frac{1}{\alpha_0 \nu}\mathcal{N} M_{\mathbf{u}}(v_0, v),\quad \mathrm{Ra}(v_0, v) = \frac{1}{\alpha_0 \nu}\frac{\beta_1 \mathcal{N}_2}{\lambda_*} M_C(v_0, v).$$

Предложение 2. *Пусть в дополнение к условиям (i)–(v)*

$$\mathrm{Re}(v_0, v) + \mathrm{Ra}(v_0, v) \equiv \frac{1}{\alpha_0 \nu}\mathcal{N} M_{\mathbf{u}}(v_0, v) + \frac{1}{\alpha_0 \nu}\frac{\beta_1}{\lambda_*}\mathcal{N}_1 M_C(v_0, v) < 1\ \ \forall v \in K. \tag{7}$$

Тогда для любого элемента $v \in K$ слабое решение Задачи 1 единственно.

2. Разрешимость экстремальных задач. Вывод системы оптимальности

Пусть $\tilde{J} : X \to \mathbf{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, $\mu_j \ge 0$ — константы, $j = 1, 2, 3$. Введем функционал $J : X \times K \to \mathbf{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, v) = \tilde{J}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|f\|_{\mathcal{C}^*}^2 + \frac{\mu_2}{2}\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \frac{\mu_3}{2}\|\chi\|_{\Gamma_N}^2.$$

Предположим в дополнение к условию (v), что выполняются условия

(vi) $\mu_j \geq 0$ и K_j — ограниченное множество, $j = 1, 2, 3$.
Исследуем следующую задачу условной минимизации

$$J(\mathbf{x}, v) \equiv J(\mathbf{u}, p, C, f, \psi, \chi, \alpha, \kappa, \mathbf{g}) \to \inf, \ F(\mathbf{x}, v) = 0, \ (\mathbf{x}, v) \in X \times K. \tag{8}$$

В качестве возможных функционалов будем рассматривать следующие:

$$J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 d\Omega, \ \ J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla C|^2 d\Omega, \ \ J_3(\mathbf{x}) = \int_\Omega rC d\Omega, \ r \in L^2_+(\Omega).$$

О физическом смысле функционалов J_1, J_2 и J_3 можно прочитать в [2]. Положим $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, v) \in X \times K : F(\mathbf{x}, v) = 0, J(\mathbf{x}, v) < \infty\}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(vi), $\tilde{J} : X \to \mathbf{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, не зависящий от p, и $Z_{ad} \neq \emptyset$. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (8).*

Доказательство. Обозначим через $(\mathbf{x}_m, v_m) \in Z_{ad}$ минимизирующую последовательность, для которой $\lim_{m\to\infty} J(\mathbf{x}_m, v_m) = \inf_{(\mathbf{x}_m, v_m)\in Z_{ad}} J(\mathbf{x}_m, v_m) \equiv J^*$. В силу (vi) для управлений f_m, ψ_m и χ_m выполняются следующие оценки:

$$||f_m||_{\mathcal{C}^*} \leq c_1, \ \ ||\psi_m||_{1/2,\Gamma_D} \leq c_2, \ \ ||\chi_m||_{\Gamma_N} \leq c_3. \tag{9}$$

Здесь и ниже $c_1, c_2, \ldots$ — некоторые константы, не зависящие от m. Из (9) и предложения 1 следует, в свою очередь, что $||C_m||_1 \leq c_4$, $||\mathbf{u}_m||_1 \leq c_5$. Из этих оценок вытекает, что существуют слабые пределы $f^* \in K_1$, $\psi^* \in K_2$, $\chi^* \in K_3$, $\mathbf{u}^* \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $C^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей $\{f_{m_k}\}$, $\{\psi_{m_k}\}$, $\{\chi_{m_k}\}$, $\{\mathbf{u}_{m_k}\}$, $\{C_{m_k}\}$ соответствующих последовательностей. Кроме того, $\mathbf{u}_{m_k} \to \mathbf{u}^*$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, $C_{m_k} \to C^*$ сильно вы $L^4(\Omega)$ при $m_k \to \infty$.

Рассуждая, как в [2], легко показываем существование такой функции (давления) p^*, что элемент $\mathbf{x}^* = (\mathbf{u}^*, p^*, C^*)$ вместе с управлением $v^* = (f^*, \psi^*, \chi^*)$ удовлетворяет соотношению $F_1(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$. Из непрерывности операторов следа и форм b, c_1 вытекает, что $F_i(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$, $i = 2, 3, 4, 5$. Наконец, из слабой полунепрерывности снизу функционала J вытекает, что $J(\mathbf{x}^*, v^*) = J^*$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 существует по крайней мере одно решение экстремальной задачи (8) при $\tilde{J} = J_l$, $l = 1, 2, 3$.*

Выведем систему оптимальности для экстремальной задачи (8). Воспользуемся для этого методикой, разработанной в [4, 5]. Введем множитель Лагранжа $\mathbf{y}^* = (\xi, \sigma, \eta, \zeta_1) \in Y^* = \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega) \times \mathcal{C} \times (H^{1/2}(\Gamma_D))^*$ и Лагранжиан $\mathcal{L} : X \times K \times \mathbf{R} \times Y^* \to \mathbf{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, v) + < \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, v) >_{Y^*\times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, v) +$$

$$< F_1(\mathbf{x}, v), \xi >_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times \mathbf{H}^1_0(\Omega)} + (F_2(\mathbf{x}, v), \sigma) + < F_3(\mathbf{x}, v), \eta >_{\mathcal{C}^*\times\mathcal{C}} + < \zeta_1, F_4(\mathbf{x}, v) >_{\Gamma_D}.$$

Здесь и ниже используется обозначение $< \zeta_1, \cdot >_{\Gamma_D} = < \zeta_1, \cdot >_{(H^{1/2}(\Gamma_D))^*\times H^{1/2}(\Gamma_D)}$. Справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(vi), $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}) \in X \times K$ — точка локального минимума задачи (8), и пусть $J(\mathbf{x}, \cdot) : K \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал для каждой точки $\mathbf{x} \in X$, причем функция $\mathbf{x} \to J'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, v)$ со значениями в X^* принадлежит классу C^0 в точке $\hat{\mathbf{x}}$ для любого элемента $v \in K$. Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) \in \mathbf{R}^+ \times Y^*$ такой, что справедливо уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$\lambda_0 < J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{x} >_{X^*\times X} + < \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{x}) >_{Y^*\times Y} = 0 \ \ \forall \mathbf{x} = (\mathbf{w}, r, \tau) \in X, \tag{10}$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, v, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \ \ \forall v \in K. \tag{11}$$

Доказательство. Доказательство теоремы сводится с учетом теоремы из [7] к проверке фредгольмовости оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})$. Последнее осуществляется по схеме, разработанной в [4].

Простой анализ показывает, что в случае, когда J не зависит от p, уравнение Эйлера — Лагранжа (10) эквивалентно тождествам

$$\nu a(\mathbf{w}, \xi) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \xi) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \xi) + c_1(\mathbf{w}, \hat{C}, \eta) + b(\mathbf{w}, \sigma) +$$

$$+ \lambda_0 < J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v}), \mathbf{w} > = 0 \ \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \ b(\xi, r) = 0 \ \forall r \in L^2_0(\Omega), \tag{12}$$

$$a_1(\tau,\eta)+c_1(\hat{\mathbf{u}},\tau,\eta)-b_1(\tau,\xi)+<\zeta_1,\tau>_{\Gamma_D}+\lambda_0<J'_C(\hat{\mathbf{x}},\hat{v}),\tau>=0\ \ \forall\tau\in\mathcal{C}, \tag{13}$$

а принцип минимума (11) эквивалентен вариационному неравенству

$$<f-\hat{f},\eta>+<\zeta_1,\psi-\hat{\psi}>_{\Gamma_D}+(\chi-\hat{\chi},\eta)_{\Gamma_N}\le\lambda_0\,[J(\hat{\mathbf{x}},v)-J(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})]\ \ \forall v\in K. \tag{14}$$

Соотношения (4), (10), (11) либо (4), (12)–(14) представляют собой *систему оптимальности* для экстремальной задачи (8). Она состоит из трех частей. Первая часть имеет вид слабой формулировки (4) Задачи 1, вторая часть состоит из тождеств (12), (13) для множителей Лагранжа и, наконец, последняя часть представляет вариационное неравенство (14) для управлений $\hat{f}$, $\hat{\psi}$ и $\hat{\chi}$.

Можно показать, рассуждая, как в [9], что вторая часть системы оптимальности также представляет собой слабую формулировку некоторой краевой задачи относительно множителей Лагранжа при выполнении следующих условий на функции ξ, η, σ и $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{C}$:

$$\xi\in\mathbf{H}^1(\Delta,\Omega)\cap\mathbf{H}^1_0(\Omega),\ \eta\in H^1(\Delta,\Omega)\cap\mathcal{C},\ \sigma\in H^1(\Omega),\ \hat{\mathbf{u}}\in\mathbf{H}^1(\Delta,\Omega),\ \hat{C}\in H^1(\Delta,\Omega).$$

Указанная краевая задача, конечно, зависит от вида используемого функционала качества. Так, например, в случае когда $J=J_1$, вторая часть системы оптимальности представляет собой слабую формулировку краевой задачи

$$-\nu\Delta\xi-(\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\xi+\nabla\hat{\mathbf{u}}^T\cdot\xi+\nabla\sigma+\eta\nabla\hat{C}=\lambda_0\Delta\hat{\mathbf{u}}\text{ в }\Omega,\ \mathrm{div}\xi=0\text{ в }\Omega,$$

$$-\lambda\Delta\eta-\hat{\mathbf{u}}\cdot\nabla\eta+w_0\frac{\partial\eta}{\partial z}+\hat{\kappa}\eta-\mathbf{b}\cdot\xi=0\text{ в }\Omega,$$

$$\xi=0\text{ на }\Gamma,\ \eta=0\text{ на }\Gamma_D,\ \lambda(\frac{\partial\eta}{\partial n}+\hat{\alpha}\eta)|_{\Gamma_N}-w_0n_3\eta=0\text{ в }H^{-1/2}(\Gamma_N),$$

относительно множителей ξ, σ, η, к которой следует присоединить следующее соотношение для нахождения множителя ζ_1:

$$\zeta_1=-\lambda\frac{\partial\eta}{\partial n}|_{\Gamma_D}\text{ в }H^{-1/2}(\Gamma_D).$$

По аналогичной схеме может быть выведена система оптимальности в случае, когда условное ограничение для задачи (8) имеет вид слабой формулировки краевой задачи для линейной системы уравнений распространения примеси, имеющей вид

$$<F_1(\mathbf{x},v),\mathbf{v}>\equiv\nu a(\hat{\mathbf{u}},\mathbf{v})+c(\mathbf{u}_0,\hat{\mathbf{u}},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},\hat{p})-b_1(\hat{\varphi},\mathbf{v})-<\mathbf{f},\mathbf{v}>=0\ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{15}$$

$$<F_3(\mathbf{x},v),S>\equiv a_1(\hat{\varphi},S)+c_1(\mathbf{u}_0,\hat{\varphi},S)-<\hat{f},S>-(\hat{\chi},S)_{\Gamma_N}=0\ \ \forall S\in\mathcal{T}, \tag{16}$$

$$<F_2(\mathbf{x},v),q>\equiv b(\mathbf{u},q)=0\ \forall q\in L^2_0(\Omega),\ F_4(\mathbf{x},v)\equiv\varphi|_{\Gamma_D}-\psi=0. \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{u}_0\in\mathbf{Z}=\{\mathbf{v}\in\mathbf{L}^4(\Omega):\mathrm{div}\mathbf{v}=0,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\text{ на }\Gamma_N\}$ — заданный вектор. Полученная система оптимальности будет состоять из уравнений (15)–(17), принципа минимума (11), тождества (13) и тождеств, имеющих в форме дифференциальных уравнений следующий вид

$$-\nu\Delta\xi-(\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\xi+\nabla\sigma=-\lambda_0S_{\mathbf{H}}J'_u(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\text{ в }\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\ \ \mathrm{div}\xi=0\text{ в }\Omega,$$

$$-\lambda\Delta\eta-\mathbf{u}_0\cdot\nabla\eta+w_0\frac{\partial\eta}{\partial z}+\kappa\eta-\mathbf{b}\cdot\xi=-\lambda_0S_HJ'_\varphi(\hat{\mathbf{x}},\hat{v})\text{ в }H^{-1}(\Omega)$$

относительно ξ,σ и η,

В частном случае, когда J не зависит от $\mathbf{u}$, из данной части системы оптимальности следует, что множители ξ и σ тождественно равны нулю. Применение предложенной схемы в случае функционала J_3 с учетом соотношений

$$\xi=0\text{ в }\Omega,\ \ \sigma=0\text{ в }L^2_0(\Omega). \tag{18}$$

приводит к тому, что вторая часть системы оптимальности имеет вид (18) и

$$-\lambda\Delta\eta-\mathbf{u}_0\cdot\nabla\eta+w_0\frac{\partial\eta}{\partial z}+\kappa\eta=-\lambda_0r\text{ в }\Omega,$$

$$\eta=0\text{ на }\Gamma_D,\ \ \lambda(\frac{\partial\eta}{\partial n}|_{\Gamma_N}+\alpha\eta)-w_0n_3\eta=0\text{ в }H^{-1/2}(\Gamma_N),\ \zeta_1=-\lambda\frac{\partial\eta}{\partial n}|_{\Gamma_D}\text{ в }H^{-1/2}(\Gamma_D).$$

Кроме того, из полученной системы оптимальности для функционала J_3 в случае, когда $\hat{f}\in L^2(\Omega)$ и $\lambda_0=1$, вытекает явная формула для нахождения его минимального значения

$$J_3^{min}\equiv\int_\Omega r\hat{C}d\Omega=-\int_\Omega\hat{f}\eta d\Omega-\int_{\Gamma_N}\hat{\chi}\eta d\Gamma-\int_{\Gamma_D}\zeta_1\hat{\psi}d\Gamma$$

через значения множителей Лагранжа η, ζ_1 и управлений $\hat{f}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\chi}$, удовлетворяющих (14).

3. Единственность решений экстремальных задач

Можно выделить два принципиально разных случая в теореме 2: *регулярный* случай, когда любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий (10), (11), является *регулярным*, т.е. имеет вид $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ при $\lambda_0 > 0$, и нерегулярный случай, когда существует хотя бы один нерегулярный множитель Лагранжа $(0, \mathbf{y}^*)$, где $\mathbf{y}^* \neq 0$, удовлетворяющий (10), (11). В первом случае, заменив в (10), (11) Лагранжев множитель $\mathbf{y}^*$ на $\mathbf{y}^*/\lambda_0$, можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Нерегулярный случай, когда уравнение Эйлера — Лагранжа принимает вид соотношения

$$< \mathbf{y}^*, F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})(\mathbf{w}, r, \tau) >_{Y^* \times Y} = 0 \ \ \forall (\mathbf{w}, r, \tau) \in X, \tag{19}$$

малоинформативен и не интересен. Действительно, в этом случае уравнение (19), имеющее смысл необходимого условия первого порядка локального минимума для задачи (8), не содержит минимизируемого функционала J. Поэтому представляет интерес установить условия как на $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{v})$, так и K, при которых любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий (10), (11), является регулярным.

Существует ряд подходов в исследовании вопроса о регулярности множителей Лагранжа. Один из них, предложенный в [9], основан на использовании так называемого свойства "C" множества K. Другой подход к исследованию регулярности множителя $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ использован в данной работе. Он заключается в привлечении условий типа условий "малости" размеров множества K, а именно условий, обеспечивающих единственность решения Задачи 1. Следуя этому подходу, опираясь на свойства системы оптимальности, можно получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и условие (7). Тогда: 1) однородное уравнение (19) имеет только тривиальное решение; 2) любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий (10), является регулярным, т.е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$; *3) уравнение (10) при* $\lambda_0 = 1$ *имеет единственное решение* $\mathbf{y}^*$.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ *для задачи (8), удовлетворяющий соотношениям (10), (11), существует, регулярен, так что* $\lambda_0 = 1$, *и определяется единственным образом.*

В соответствии с методикой, предложенной [6], можно исследовать единственность решения экстремальной задачи (8). Рассмотрим для конкретности случай, когда роль функционала качества играет J_2 и $\mu_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Предположим, что K_1, K_3 — непустые ограниченные выпуклые замкнутые подмножества. В качестве K_2 выберем следующее непустое ограниченное выпуклое замкнутое подмножество:

$$K_2 = \{\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D) : \psi = \psi_0 \text{ на } \Gamma_D^0 \subset \Gamma_D, \mathrm{meas}\Gamma_D^0 > 0, \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} \le c_9 < \infty\}. \tag{20}$$

Положим $H^1(\Omega, \Gamma_D^0) = \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma_D^0\}$. Отметим, что в силу неравенства Фридрихса-Пуанкаре справедлива оценка

$$\|S\|_1^2 \le \frac{1}{\alpha_1^*} |S|_1^2 \ \ \forall S \in H^1(\Omega, \Gamma_D^0).$$

Здесь α_1^* — константа, зависящая от Ω и Γ_D^0, причем $\alpha_1^* = \alpha_1$ при $\Gamma_D^0 = \Gamma_D$.

Таким образом, рассмотрим экстремальную задачу

$$J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla C|^2 d\Omega \to \inf, \ F(\mathbf{x}, v) = 0, \mathbf{x} \in X, v \in K. \tag{21}$$

Предположим, что выполняются достаточные условия существования решения задачи (21), а также условие

$$\frac{1}{\alpha_0 \nu} \mathcal{N} M_{\mathbf{u}}^0 + \frac{1}{\alpha_0 \nu} \frac{\beta_1 \mathcal{N}_1}{\lambda_*} M_C^0 < \omega \ \ (\omega = \mathrm{const} \le 1), \tag{22}$$

где константы $M_{\mathbf{u}}^0$ и M_C^0 определяются соотношениями $M_{\mathbf{u}}^0 = \sup_{v \in K} M_{\mathbf{u}}(v_0, v)$, $M_C^0 = \sup_{v \in K} M_C(v_0, v)$, и исходные данные удовлетворяют следующему условию

$$\frac{1}{\alpha_1^*} \frac{2\beta_1}{(1-\omega)^2 \alpha_0 \nu} \left[\frac{\omega \mathcal{N}}{(1-\omega)\alpha_0 \nu} + \frac{\mathcal{N}_1}{\lambda_*} \right] M_C^0 < 1. \tag{23}$$

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Пусть в дополнение к условиям* $(i) - (iv)$ K_1, K_3 *— непустые ограниченные выпуклые замкнутые подмножества, множество* K_2 *определяется формулой (20) и выполняются условия (22), (23). Тогда экстремальная задача (21) имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, p, C, f, \psi, \chi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times K_1 \times K_2 \times K_3$.

Список литературы

[1] Адомавичюс Э. А. О разрешимости некоторых экстремальных задач для стационарных уравнений тепловой конвекции // Дальневосточный матем. сб. 1998. Вып. 5. С. 74–85.

[2] Адомавичюс Э. А., Алексеев Г. В. Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений массопереноса. Препринт № 7. ИПМ ДВО РАН. Дальнаука, Владивосток, 1999.

[3] Адомавичюс Э. А., Алексеев Г. В. О разрешимости неоднородных краевых задач для стационарных уравнений массопереноса // Дальневосточный матем. журн. № 2. 2001 (в печати).

[4] Алексеев Г. В. Стационарные задачи граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Докл. РАН. 1998. 362, № 2. С. 174–177.

[5] Алексеев Г. В. Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.

[6] Алексеев Г. В., Терешко Д. А. Стационарные задачи оптимального управления для уравнений вязкой теплопроводной жидкости // Сиб. ж. инд. мат. 1998. Т. 1, № 2. С. 24–44.

[7] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[8] Abergel F., Casas E. Some optimal control problems of multistate equation appearing in fluid mechanics // Math. Modeling Numer. Anal. 1993. Vol. 27. P. 223–247.

[9] Gunzburger M. D., Hou L., Svobodny T. P. Boundary velocity control of incompressible flow with application to viscous drag reduction // SIAM J. Contr. Optim. 1992. Vol. 30, No. 1. P. 167–182.

[10] Lee H. C., Imanuvilov O. Yu. Analysis of optimal control problems for the 2-D stationary Boussinesq equations // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 242, No. 2. P. 191–211.