

ДЕФЕКТ ТОЧНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ

А. Н. МИНАЙЛОС

Центральный аэрогидродинамический институт ЦАГИ, Москва, Россия

E-Mail: minaylos@rambler.ru

Высокий (выше второго) порядок аппроксимации численного решения принципиально важен для расчёта систем жёстких уравнений, в которых при старших производных стоят очень малые коэффициенты (уравнений Навье-Стокса, Рейнольдса, волнового уравнения). Потребности решения таких систем стимулируют повышение точности методов в вычислительной математике. Обсуждаются факторы (сквозной счёт разрывов функций и производных, монотонизаторы, среднеарифметические значения произведений), снижающие порядок точности системы до второго или первого при неудачном конструировании метода. Рассмотрена также дифференциальная форма основных уравнений, которая ограничивает решение интегральных законов сохранения вторым порядком точности. Для устранения этой погрешности необходимо отказаться от дифференциальной формы, а при переходе от интегральной формы законов к разностной учесть интерференцию функций-множителей под знаками интегралов. Для учёта этих факторов нужна новая философия построения методов расчёта, развитие алгоритмов повышенной точности.

1. ПРОБЛЕМА.

Пусть K - порядок аппроксимации всего получаемого численного решения, k - порядок точности основной системы дифференциальных уравнений, k_i - порядок точности i -го дополнительного алгоритма (расчёта начальных и краевых условий, особенностей решения, сеток и их особенностей, расчёта модели турбулентности и т. п.). Тогда в согласованных нормах:

$$K = \min(k, k_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

Это вполне очевидное и естественное соотношение должно учитывать физические (и, следовательно, математические) области распространения возмущений (и погрешностей решения в том числе).

Для многих систем уравнений повышение порядка точности решения не носит принципиального значения, но есть класс систем жёстких уравнений - СЖУ (они имеют при старших производных очень малые коэффициенты ε), для которых при низком значении K в настоящее время не удаётся получить достаточно точных решений, поскольку интересующие вычислителя члены системы оказываются значительно меньшими по величине (иногда на десятичные порядки) чем погрешности аппроксимации численного метода [2]. Это, например, уравнения Навье – Стокса при числах $Re > 10^4$, Рейнольдса осреднённого турбулентного движения, волновое уравнение для сплошных (в том числе электро – магнитных) сред.

СЖУ имеет вид

$$U_i + F_x - \varepsilon G_{xx} = 0, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.2)$$

Здесь U - вектор искомых переменных, F и G -тензоры. Малый коэффициент системы – вектор ε определяет её жёсткость и иногда достигает в обезразмеренной системе величины 10^{-4} - 10^{-9} . Решения таких систем необходимы в практической деятельности человека, количество задач для них постоянно растёт. Решение СЖУ, как правило, имеет эллиптический тип. Поэтому будем считать соотношение (1.1) справедливым во всём поле задачи. В работах [3 - 4] предложена методика решения СЖУ. Предлагается в предварительном анализе здать желаемую точность вязких членов (в виде – множителя 10^m) относительно погрешности аппроксимации первого дифференциального приближения системы. Точность оценивается с помощью предельного ограничивающего коэффициента жёсткости системы (это векторная величина)

$$\varepsilon_m = 10^m \nu \delta D(K) / [(K+1)! n^K] \quad (1.3)$$

Здесь $D(K)$ -отношение $(K+1)$ -ой производной продольной компоненты скорости (или энергии), осреднённой поперёк пограничного слоя, к второй осреднённой производной этой компоненты. Например, для

решения Блязиуса $D(1)=1$, $D(2)=3.25$, $D(3)=16.2$, $D(4)=100$. Толщина пограничного слоя $-\delta$, на ней поперек слоя располагается $-n$ узлов сетки, поперечная компонента скорости v по порядку величины равна δ . Из векторного предельного коэффициента (например, для уравнений Навье-Стокса этот вектор содержит две компоненты для уравнения движения и уравнения энергии, отличающиеся множителем $-1/Pr$) выбирается меньшая, более жёсткая компонента. Это соотношение является в методике основным и связывает реальную жёсткость системы ($\varepsilon > \varepsilon_m$), требуемую точность расчёта вязких членов (показатель m), уровень сложности алгоритмов (K) и число узлов (n), обусловленное мощностью ПК, что позволяет задать необходимые для счёта величины: порядок точности решения - K и число узлов расчётной сетки поперёк слоя - n . Оказывается, что для широкого класса прикладных задач с заданным значением ε и для современных ЭВМ (заданы n и разрядность чисел) необходимо сохранять значение K большим двух [2].

Соотношение (1.1) накладывает очень жёсткие ограничения на все алгоритмы метода. Как показал анализ [2], при $k \geq 2$ из-за дополнительных алгоритмов низкой точности ($k_i=1$)- обычно величина $K=1$. Поэтому для получения решения с высоким значением K в процессе решения всей задачи вычислитель должен следить за его сохранением. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы, в которых низкие значения k_i снижают величину K «помимо» воли вычислителя.

2. СНИЖЕНИЕ K ДО ЗНАЧЕНИЯ 1.

1). Это происходит в случаях сквозного счёта разрывов (нулевого порядка относительно шага сетки $h = 1/n$) в исследуемом численном решении как самих сеточных функций решения (например, сквозного счёта ударных волн, тангенциальных и особых разрывов и т. п., если внутри фронта не располагается достаточное в соответствии с оценками работ [2 - 4] количество счётных узлов; сквозного счёта границы ядра вихря в сжимаемом газе; сквозного счёта разрыва коэффициентов Ламэ системы координат счётной сетки), так и сквозного счёта разрывов нулевого (по размеру шага h) порядка первых производных сеточных функций (в том числе и разрыва первых производных численного решения при отсутствии особенности, например, в окрестности экстремума функции при грубой сетке).

Рассмотрим подробнее случаи разрыва первых производных для одномерных ячеек, включающих от одного до четырёх узлов. Ниже в таблице показаны шаблоны схем, кружки отмечают положение узлов, косые штрихи - точки, в которых учитываются первые производные. Интегралы берутся на длине, отмеченной тройной линией (иногда интеграл не охватывает всю ячейку). В формулах, аппроксимирующих интегралы по ячейке (или её части), справа в фигурной скобке стоит среднее по интегралу значение подинтегральной функции, полученной на заданном шаблоне.

1. $\equiv O \equiv \int_0^h f(x) dx = h \{ f_{1/2} + h/8(f'_+ - f'_-) + h^2/12 f''(\xi) \}$
2. $/ \equiv O \equiv / \int_0^{2h} f(x) dx = 2h \{ f_0 + h/4(f'_1 - f'_{-1}) + O(h^3) \}$
3. $O \equiv / O \int_0^h f(x) dx = h \{ (f_0 + f_1)/2 - h/12(f'_1 - f'_{-1}) + h^4/1440 f^{(4)}(\xi) \}$
Милн
4. $O - O \equiv O \int_0^h f(x) dx = h \{ (-f_{-1} + 8f_0 + 5f_1)/12 + h^3/2 f^{(3)}(\xi) \}$ Хемминг
5. $O / - O \equiv / O \int_0^h f(x) dx = h \{ (-19f_{-1} + 128f_0 + 131f_1)/240 - h/240(23f'_1 + 7f'_{-1}) + O(h^3) \}$
6. $O \equiv O \equiv / O \int_0^{2h} f(x) dx = 2h \{ (7f_{-1} + 16f_0 + 7f_1)/30 - h/30(f'_1 - f'_{-1}) - h^7/4725 f^{(6)}(\xi) \}$
7. $O \equiv O \equiv / O \int_0^{2h} f(x) dx = 2h \{ (f_{-1} + 2f_0 + f_1)/4 - 1/2[h/12(f'_1 - f'_{-1}) - h^3/720(f^{(3)}_1 - f^{(3)}_{-1}) + h^5/30240(f^{(5)}_1 - f^{(5)}_{-1}) + \dots] \}$
Л.Эйлер
8. $O - O \equiv O - O \int_0^h f(x) dx = h \{ [-f_{-1} + 13(f_0 + f_1) - f_2]/24 + 11/720 h^4 f^{(4)}(\xi) \}$
9. $O \equiv O \equiv O \equiv / O \int_0^{3h} f(x) dx = 3h \{ (f_{-1} + 2f_0 + 2f_1 + f_2)/6 - 1/3[h/12(f'_2 - f'_{-1}) - h^3/720(f^{(3)}_2 - f^{(3)}_{-1}) + h^5/30240(f^{(5)}_2 - f^{(5)}_{-1}) + \dots] \}$
Л.Эйлер

Из этих формул следуют выводы.

1. Если формулы не содержат производных и первые производные имеют нулевой по h порядок для несимметричных схем, или разность первых производных на границах ячейки имеет нулевой по h порядок для симметричных схем (т. е. первые производные терпят разрыв нулевого порядка в пределах ячейки), то схема описывает среднеинтегральное значение в ячейке с точностью первого порядка. Таким образом, не только разрывы нулевого порядка самих функций, но и разрывы нулевого порядка первых производных приводят к значению $K = 1$.
2. Расширение области задания производных (примеры 1 и 2), как и задания самой функции, повышает порядок аппроксимации.
3. Применение разных аппроксимирующих полиномов при выводе формул на одном шаблоне даёт разные, но близкие коэффициенты формул (6 и 7).
4. После подстановки в формулу (например, 5) вместо производных их выражения через значения функции в узлах с достаточной точностью получается формула (4) без производных, но это не позволяет считать решения с разрывными производными с точностью выше первого порядка.
5. Формулы Эйлера являются частными случаями известной общей формулы Эйлера, связывающей интеграл с суммой в узлах и производными на концах интервала. Из них следует, что с повышением величины K повышаются и требования к гладкости более высоких производных интегрируемой функции.

Примеры разрыва производных: первая характеристика течения Прандтля–Майера в невязкой части течения, линия центра вихря в несжимаемой жидкости при конечном градиенте завихренности на этой линии, линии инициации (фронты) горения или химической реакции.

Замечание 1. Часто оппоненты автора утверждают, что в рассматриваемых системах, например Навье–Стокса, ввиду эллиптичности уравнений не может быть разрывов функций и их производных и поэтому никакого снижения величины K по причине сквозного счёта несуществующих разрывов не может быть. Но в пространстве численных сеточных функций разрывы образуются и существуют ввиду плохой аппроксимации. Так в СЖУ резкое изменение параметров происходит в узких областях (толщиной порядка $\epsilon/2$), которые без специальных сгущений узлов имеют толщины порядка шага или доли шага сетки h . И хотя разрывов нет в физической модели, на самом деле в разностной постановке вычислитель имеет дело с сеточными функциями, гладкость которых определяется не только уравнениями описываемого физического явления, но и размером шага, а также алгоритмами восполнения решения, действительным порядком аппроксимации K . В нашем случае функция (производная) резко меняется в масштабе счётной ячейки (нет аппроксимации), этот факт и назван выше “разрывом самой сеточной функции или её производной”, при этом $K = 1$ (например, при разрыве нулевого порядка производной в узле ячейки справа и слева). Поэтому часто вместо того, чтобы выделять очень узкие области и размещать в них узлы в соответствии с оценками, проще рассмотреть их как линии разрыва (если для описания разрывов есть алгоритмы достаточной точности). Помимо этого, в решениях могут просто существовать области, где разрывы, например, передние фронты реакций и горения, или ударные волны и начальные разрывные характеристики Прандтля–Майера в невязком течении, существуют и в физической модели; а погрешности распространяются (из невязких областей) в вязкие слои.

2). Порядок $K=1$ также в случаях применения к функциям решения или сетки различных монотонизаторов вне зависимости от порядка их точности.

Например, в работе [5] значение $k=2$. Кроме сквозного счёта обе использованные схемы применяют сглаживание, т. е. $K=1$. Зависимости аэродинамических коэффициентов CL и CDP от размеров шага для «поточковой» схемы линейны, что свидетельствует о первом порядке аппроксимации, вопреки утверждению автора. А вот для коэффициента CDF , а также всех зависимостей «центральной» схемы точка с самым крупным шагом просто не попадает в область сходимости решения. Коэффициент CDF является интегралом тонкой, «градиентной» характеристики течения [2], он искажается сильнее, чем интегралы от самих функций потока и на грубой сетке не попадает в область сходимости.

3. СНИЖЕНИЕ K ДО ЗНАЧЕНИЯ 2.

1). Это происходит в методах конечных объёмов в случаях расчёта функций из их комплексов в узлах на выходных гранях ячеек, где используются значения произведений функций в узлах вместо более точного представления, соответствующего средним интегральным значениям произведений по объёмам ячеек. Эта ошибка в настоящее время свойственна работам практически всех вычислителей, работающих со схемами конечных объёмов со значением $k > 2$. Поэтому и результаты, полученные по таким схемам (например, со значениями $k = 3, 6$ и даже произвольным (sic!) [6-8]) на самом деле имеют величину $K \leq 2$. Автор работы [7] ($k = 6$) провёл интересное исследование распространения счётных ошибок и влияния размера шага в задаче истечения струи. Но он не знал, что помимо погрешностей краевых условий ($k_1=3$) в решении присутствует погрешность среднearифметических значений ($k_{i+1} = 2$), а также погрешность дифференциального вида исходных уравнений (см. ниже) - ($k_{i+2} = 2$), и происходит интерференция погрешностей. В целом, работы [7,8]

важны наличием точного газодинамического решения, позволяющего определить численные погрешности с точностью до ошибок округления (проверка неэффективна на модельных задачах, которые не имеют среди среднеинтегральных функций произведений). Чтобы устранить погрешность $k_{i+1} = 2$, возможны два пути построения метода. Нужно или пользоваться только комплексами (но расчёт химической кинетики, горения и т. п. построен на функциях, а не комплексах), или использовать алгоритмы пересчёта среднеинтегральных значений в значения в узлах. Такой алгоритм - прогонка представлен в докладе [9], он основан на результатах классической работы И. В. Петухова [1]. Эта работа по непонятным причинам (видимо сейчас настает её время!) выпала из рассмотрения вычислителей. Петухов получил свой классический результат: разложение для осреднённого по ячейке произведения функций - только для одномерных и двумерных ячеек и до четвертого порядка по h . Для трёхмерных ячеек и значений $K \geq 4$ это ещё предстоит сделать! Отметим, что контурные ряды Петухова асимптотические, и приведём основные (для нас) формулы. Пусть среднее интегральное значение одномерной функции $f(x)$ на интервале Δ - $f^* = 1/\Delta \int_0^\Delta f(x)dx$. Тогда для интегрального среднего от произведения одномерных функций формулы Петухова имеют вид:

$$(fg)^* = f^* g^* + \delta f \delta g / 12 + O(\Delta^4) \quad (3.1)$$

$$(efg)^* = e^* f^* g^* + e^* \delta \delta (f, g) + f^* \delta \delta (e, g) + g^* \delta \delta (e, f) + O(\Delta^4)$$

Здесь через δf обозначена разность $\delta f = f_+ - f_-$, где индексами отмечены значения на концах интервала Δ . Через $\delta \delta (f, g)$ обозначен член первой формулы $\delta f \delta g / 12$, который также выражается через производные в центре ячейки (при $\Delta = 2h$) $\delta \delta (f, g) = h^2 f_0'' g_0'' / 3 + O(h^4)$.

Аналогично для функции двух переменных в прямоугольнике $(\Delta x, \Delta y)$, где $f^* = 1/(\Delta x \Delta y) \int_0^{\Delta x} \int_0^{\Delta y} f(x, y) dx dy$ формула Петухова:

$$(fg)^* = f^* g^* + (\delta f_{++} \delta g_{++} + \delta f_{--} \delta g_{--}) / 24 + O(\Delta^4) \quad (3.2)$$

Здесь в разностях парные индексы означают положение узла в прямоугольнике ячейки относительно её центра. Так $\delta f_{++} = f_{++} - f_{--}$, а $\delta f_{+-} = f_{+-} - f_{-+}$. В каждой паре первый индекс относится к переменной x , а второй - к y . А $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y)$. Как и для (3.1), второй член можно выразить через произведения «косых» производных, при этом станет очевидным, что второй член имеет порядок h^2 . Распространим формулы Петухова на произведения трёх и четырёх сомножителей. Для этого введём обозначения: для второго члена - $\Delta \delta (f, g) = (\delta f_{++} \delta g_{++} + \delta f_{--} \delta g_{--}) / 24$, а также для сумм с циклической перестановкой трёх и четырёх сомножителей -

$$\Sigma \Delta \delta (e, f, g) = \Delta \delta (e, fg) + \Delta \delta (f, eg) + \Delta \delta (g, ef)$$

$$\Sigma e^* \Delta \delta (f, g) = e^* \Delta \delta (f, g) + f^* \Delta \delta (e, g) + g^* \Delta \delta (e, f)$$

$$\Sigma e^* f^* \Delta \delta (g, h) = e^* f^* \Delta \delta (g, h) + e^* g^* \Delta \delta (f, h) + e^* h^* \Delta \delta (f, g) + f^* g^* \Delta \delta (e, h) +$$

$$+ f^* h^* \Delta \delta (e, g) + g^* h^* \Delta \delta (e, f).$$

Тогда для произведения трёх и четырёх функций получим формулы

$$(efg)^* = e^* f^* g^* + [\Sigma e^* \Delta \delta (f, g) + \Sigma \Delta \delta (e, f, g)] / 3 + O(\Delta^4) \quad (3.3)$$

$$(efgh)^* = e^* f^* g^* h^* + [2 \Sigma e^* f^* \Delta \delta (g, h) + e^* \Sigma \Delta \delta (f, g, h) + f^* \Sigma \Delta \delta (e, g, h) +$$

$$+ g^* \Sigma \Delta \delta (e, f, h) + h^* \Sigma \Delta \delta (e, f, g)] / 12 + O(\Delta^4) \quad (3.4)$$

Таким образом, в одномерной и двумерной ячейках среднее интегральное от произведения функций представимо в виде разложения в ряд по размеру ячейки Δ . В этом ряду первый член есть произведение среднеинтегральных значений этих функций, а второй член равен $\Delta^2 \Psi$, где Ψ - сумма (с циклической перестановкой) произведений «косых» производных и среднеинтегральных значений функций; третий член имеет порядок Δ^4 .

2). Значение K ограничено величиной 2 также для всех методов, использующих в качестве основных исходных законов сохранения (ЗС) их дифференциальную форму (ДФ) для точки, а не интегральную (ИФ) для

конечного объёма с учётом всех членов необходимого порядка. Поскольку обычно в деятельности человека, кроме исследования особенностей, решаются задачи в конечных областях, и мы живём в конечномерном мире, будем исходить из ИФЗС, т. е. считать её основой законов механики. С точки зрения аналитической математики справедлива условная формула

$$ИФЗС = \int_s (ДФЗС) ds \quad (3.5)$$

где s – объём, площадь или длина ячейки. Формула справедлива при прямом и обратном преобразовании и для любых конечных областей s . Однако, при конечно-разностном представлении решения возникает проблема описания функции и произведения функций в ячейке (в виде постоянного значения, среднеарифметического в узлах и т. п.). При этом возникает зависимость этого описания от размера ячейки - h . Наиболее полное и естественное описание – среднеинтегральное. Среднеинтегральное произведение подинтегральных функций по Петухову представимо в виде разложения по h в контурные ряды и это для нас очень существенно.

Рассмотрим ИФЗС. В ней всегда присутствуют члены, определяемые размером исследуемого объёма - h . Например, скорость в точке внутри ячейки можно представить как векторную сумму скорости однородного поступательного движения массы всей ячейки как целого (центра ячейки) V - это первая компонента, она рассматривается в ДФ и имеет нулевой порядок величины относительно h , скорости вращения ячейки как твёрдого тела вокруг центра (по теореме Эйлера) и скорости чисто деформационного движения ячейки, характеризуемого тензором скоростей деформаций ячейки (по первой теореме Гельмгольца). Вторая и третья линейные компоненты вектора скорости имеют первый порядок по h . При переходе от объёма к точке (к ДФЗС) уравнение теряет члены, определяемые трансформацией исчезающего объёма, т. е. вторую и третью компоненты скорости. Рассмотрим кинетическую энергию в счётной ячейке $E = \rho W^2/2$. Каждой компоненте скорости соответствует часть кинетической энергии, вторая и третья части имеют второй порядок по h . Итак, в кинетической энергии ДФ теряются члены, определяющие энергию вращения вещества ячейки и энергию деформации массы в ячейке, а остаётся только член энергии поступательного движения. К аналогичному результату можно прийти и не прибегая к физической интерпретации, а чисто математическим путём, применяя к ИФЗС внутри ячейки формулы Петухова (3.2-3.4). Например, для плоской прямоугольной ячейки со сторонами $2h_x, 2h_y$ и постоянной плотностью (для простоты) формула (3.2) даёт выражение величины кинетической энергии $\rho W^2/2$

$$E = M (W^2) * /2 = M/2 [W^*W^* + 1/24((W_{++} - W_{--})^2 + (W_{+-} - W_{-+})^2)] + O((2h)^4)$$

где M – масса вещества в ячейке. Представим скорость в виде векторной суммы поступательного движения центра масс V и вращательного $r\omega$ относительно центра масс (ω -угловая скорость, $r = (h_x^2 + h_y^2)^{1/2}$ - расстояние от центра до узлов ячейки, где заданы функции). Сократим ввиду полярной симметрии в первом слагаемом W^*W^* (произведение сумм в узлах) члены с угловой скоростью, а во втором (произведения разностей) – с поступательной. Окончательно

$$E = M/2 [V^2 + \omega^2 (h_x^2 + h_y^2)/3] + O((2h)^4)$$

Первый член представляет энергию поступательного, а второй – вращательного движения, коэффициент $M(h_x^2 + h_y^2)/3$ – главный момент инерции массы относительно центра ячейки. Если считать массу и плотность в ячейке переменными, то появятся и члены, соответствующие тензору деформации.

Переход от ИФ к ДФ и обратно при произвольности объёма ячейки вполне правомочен, однако при сетке конечных размеров (а не в точке) ДФ описывает исходные законы с точностью второго порядка. При обратном переходе от ДФ к ИФ в методах конечного объёма для точности выше второго порядка необходимо восстановить “пропавшие” члены, пропорциональные h^2 , что в настоящее время не делается никем (кроме, конечно Петухова). На нарушение уравнений (к сожалению, без оценок порядков погрешностей) обратил внимание Л. И. Северинов [10], выступающий против использования в численных методах вообще (чем отличается от автора настоящей работы) ДФЗС и уравнений, из нее полученных. Таким образом, критика Северинова выступающего с позиций физики, конечно, справедлива, но только при сохранении порядка $K > 2$. В случаях $K \leq 2$ выбор формы записи уравнений (или их преобразование из ДФ) – несущественен.

Таким образом, схематично ИФЗС в разностной интерпретации можно представить в виде

$$ИФ = \int_s \Delta ds \int_s \Phi ds + \Delta^2 \Psi + O(\Delta^4) \quad (3.6)$$

Здесь в символьной форме показано, что справа стоят суммы произведений среднеинтегральных величин, а обычно исчезающие дополнительные члены учтены, вынесены и обозначены так же, как в пункте 3.1). Первый член - это то, с чем обычно оперируют вычислители, учитывая только функции без производных в пределах

ячеек.

Фактически ДФЗС, или уравнения, полученные из ДФ без учёта членов Ψ , используются сейчас во всей механике! Применение дифференциальных уравнений Эйлера, Навье-Стокса, Рейнольдса, уравнений внешней баллистики, небесной механики и т. д. для конечных областей ограничивает точность интегральных ЗС вторым порядком по размеру счётного шага (независимо от порядка аппроксимации $k > 2$ используемых алгоритмов). Поэтому для всех схем с $k > 2$, например [6-8, 11], гидроаэродинамические задачи решаются с порядком $K \leq 2$, а для схем в конечных разностях, например, [11], в отличие от схем конечных объёмов, исправить ситуацию невозможно, и повышение порядка только усложняет счёт. Ну, а если используется метод конечных объёмов, построенный на ДФ, то добавляется ещё погрешность пункта 3. 1), имеющая тоже второй порядок. Однако, в отличие от “безнадёжных” схем ДФ, схемы ИФ могут быть исправлены и дать результаты с порядком $K > 2$.

Замечание 2. Математические основы пунктов 1) и 2) одни и те же.

Учёт членов Ψ возможен до росписи разностных уравнений, а может быть включён просто в разностную схему (но, конечно, не забыть!).

А что же происходит с решениями ИФ и ДФ при повышении точности? Точность можно повышать за счёт роста значений K и уменьшения Δ . При повышении порядка K решение ДФ будет сходиться, но не к ИФЗС, а к интегралу ДФ (без учёта произведений производных в ячейках – например, без учёта энергии вращения массы ячейки). Поэтому наличие самой сходимости высокого порядка ещё не доказывает, что решение ИФ получено с высоким порядком. Просто два различных решения ИФ и ДФ могут сходиться каждое с высоким порядком, отличаясь друг от друга на величину второго порядка. Но, как мы договорились, будем считать справедливой ИФ. И, конечно, оба эти решения при мельчении шага стремятся к одному пределу, но решение ИФ всегда отличается от предельного на величину 4-го порядка, а решение ДФ – на величину 2-го порядка.

$$\lim_{K \rightarrow \infty, \Delta = const} ИФ = \lim ДФ + \Delta^2 \Psi + O(\Delta^4), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0, K = const} ИФ = \lim ДФ$$

Наконец, в связи с развитием для СЖУ интегральных методов высокой точности, возникает потребность в развитии интегродифференциального анализа, аналогичного развитому для систем дифференциальных уравнений (например теории интегродифференциального приближения и т. д.). А вот точные аналитические решения ДФЗС сохраняют свою точность и для ИФ (и значение для вычислительной математики в качестве реперных точек), если они получены без привлечения конечно-разностного представления. Примером нарушения этого «табу» является, например, решение Блязиуса для пластины.

4. ИФЗС ДЛЯ ПЛОСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯЧЕЙКИ.

ИФЗС на примере аэрогазодинамики в переменных Эйлера в плоской ячейке записывается в виде:

$$\begin{aligned} \int_s [\rho_2 - \rho_1] ds + \int_t \int_l \rho (\mathbf{Vn}) dldt &= 0 \\ \int_s [\rho V_2 - \rho V_1 - \int_l \mathbf{F} dt] ds + \int_t \int_l [\rho(\mathbf{n} + \boldsymbol{\vartheta}) + \rho (\mathbf{Vn})V] dldt &= 0 \quad (4.1) \\ \int_s [H_2 - H_1 - \int_l [(\mathbf{FV}) + Q] dt] ds + \int_t \int_l [\rho(\mathbf{Vn}) + p(\mathbf{V}\boldsymbol{\tau}) + H(\mathbf{Vn}) + (\mathbf{Wn})] dldt &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $\rho, p, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \mathbf{W}$ – плотность и давление, вектора скорости, поверхностной внешней силы и плотности теплового потока ($\mathbf{W} = -\kappa \text{grad } T$, κ – скаляр), полная энергия $H = \rho(\varepsilon + V^2/2)$, ε – внутренняя энергия, Q – мощность объёмных источников энергии, \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные вектора внешней нормали и касательной к контуру ячейки. $(\mathbf{Vn}), (\mathbf{V}\boldsymbol{\vartheta}), (\mathbf{Wn}), (\mathbf{FV})$ – скалярные произведения, второе уравнение (движения) – векторное; t, s, l_0 – время, площадь поверхности ячейки и длина её контура. Индексами отмечены комплексы, относящиеся к начальному и конечному моментам времени $t = t_1, t = t_2$.

При переходе к представлению ИЗС через значения в узлах ячейки возникает зависимость уравнений от шаблона и размера ячейки h , и ЗС представляются в виде разложений в ряды (3.6) по параметру h . Распишем разностные уравнения газодинамики для случаев плоских течений и прямоугольной ячейки с узлами в её углах, ограничившись вторым порядком точности (есть формулы Петухова). В этой системе интегральные средние от произведений по площади ячейки $ds = hx hy$, а также по длине контура $l_0 = 2(hx + hy)$ и времени $\Delta t = t_2 - t_1$ расписываются по формулам (3.2-3.4). Интеграл по s и t распишем по s . Введём обозначения $r = \Delta t l_0 / ds$, интегральные средние по ds – $f^* = 1/(hx hy) \int_0^{hx} \int_0^{hy} f(x,y) dx dy$ и по $(\Delta t l_0)$ – $f^* = 1/(\Delta t l_0) \int_0^{\Delta t} \int_0^{l_0} f(t,l) dt dl$. Система примет вид:

$$\begin{aligned}
 (\rho_2 - \rho_1)^* + r [\rho^* (V^* \mathbf{n}) + \Delta \delta (\rho (V \mathbf{n}))^*] + O(h^4) &= 0 \quad (4.2) \\
 (\rho^* V^*)_2 - (\rho^* V^*)_1 + \Delta \delta (\rho V_2 - \rho V_1)^* - \int_i F^* dt + r [p^* (\mathbf{n} + \boldsymbol{\vartheta}) + \rho^* (V^* \mathbf{n}) V^* + &+ \Delta \delta (\rho (V \mathbf{n}) V^*)^*] + O(h^4) = 0 \\
 H_2^* - H_1^* + \Delta \delta (H_2 - H_1)^* - \int_i [(F^* V^*) + \Delta \delta (F V)^* + Q^*] dt + r [p^* ((V^* \mathbf{n}) + (V^* \boldsymbol{\vartheta})) + &+ H^* (V^* \mathbf{n}) + \Delta \delta (H (V \mathbf{n}))^* + (W^* \mathbf{n})] + O(h^4) = 0
 \end{aligned}$$

Во всех уравнениях системы помимо интегралов из ДФ появились члены второго порядка. Для плоского стационарного течения уравнения упрощаются, применяются формулы (3.1- 3.4). Каждое уравнение такой системы также содержит члены второго порядка.

Если при преобразовании системы (4.1) применяются формулы Остроградского-Гаусса, то размерность интегралов уменьшается на единицу и в случае плоских течений достаточно применить формулы (3.1). Сущность преобразований при этом не меняется.

Таким образом, при необходимом порядке аппроксимации $K > 2$, уравнения, полученные из ДФ, неприменимы, а уравнения из ИФ должны записываться с дополнительными членами Петухова порядка h^2 .

5. ФОРМУЛА ЖЁСТКОСТИ ПРИ $K > 2$.

При выводе формулы жёсткости (1.3) была использована ДФ уравнений, точность которой, как мы теперь видим, ограничена вторым порядком. Покажем, что формула может использоваться и при оценках с $K > 2$. Хотя, конечно, наиболее последовательно было бы вместо дифференциального рассматривать в анализе интегро-дифференциальное приближение ИФЗС для счётной ячейки, свободное от ограничений на величину K . Выпишем это приближение для ИФЗС. Неравенство (2.2) работы [4] примет вид:

$$ds | \epsilon G_{yy} |^* \gg ds | c_K h_K / (K+1)! \partial^{K+1} F / \partial y^{K+1} |^*$$

Сократив на ds , получим формулу жёсткости для средних по площади ячейки (а не по длине её грани!) значений производных

$$\epsilon m D = 10 m \delta / [(K+1)! n K] \{ [v^* (u y^* (K+1))^* + h^2 v y^* u y^* (K+2) + \dots] / [u y^* (2)] \}$$

Опуская в числителе фигурной скобки второй член, получим формулу (1.3), в которой вместо v стоит v^* , которая, как и величина $D(K)^*$, вычислена по площадям (а не по граням) слоя ячеек во всём пограничном слое. Для оценок в рассматриваемом случае отличия не существенны, поэтому можно проводить оценки в ДФЗС, и выводы пункта 1. сохраняют своё значение и при $K > 2$.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОСТРОЕНИЮ МЕТОДА РАСЧЁТА СЖУ.

А. $K=3 \div 4$. В математическом пространстве сетка равномерна, в физическом - неравномерна. Алгоритм сжатия сетки аналитический. Применяется ТФКП для трансформации областей счёта [12] и сплайн-аппроксимации для построения границ. Точность $K > 4$ теперь нецелесообразна, она требует от численного решения высокой гладкости; вычислители к этому не готовы.

Б. Необходима интегральная форма основных уравнений с учётом членов второго порядка.

В. Схема трёх – четырёхслойная, неявная, максимально устойчивая.

Г. Разрывы сеточных функций и их первых производных должны быть выделены [12,13]. Отпадают требования к монотонности схемы, необходимые при сквозном счёте. Схемы, использующие принцип TVD Колгана, как и схемы «распадного» типа, неперспективны.

Д. Применять среднеинтегральные, а не среднеарифметические (как это общепринято), значения произведений функций в узлах.

Е. Целесообразно применение специальных алгоритмов анализа поля для определения возникающих в процессе счёта разрывов и их выделения в качестве разрезов, границ [12] и областей счёта на густой сетке.

Ж. Желательно сопоставление (с порядком K) сингулярных членов решения с невязками уравнений, а также публикация такого сравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Петухов И. В. О контурных рядах и их применении в интегральных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 196 - 207.

- [2] Минайлос А. Н. Точность численных решений уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 7. С. 1220-1232.
- [3] Минайлос А. Н. Метод расчёта ламинарных и турбулентных течений с точностью, заданной относительно вязких членов. XXIV академические чтения по космонавтике. Тезисы докладов. М.: Война и мир. 2000 г. С. 144 – 147.
- [4] Минайлос А. Н. Методика расчёта систем жёстких уравнений в частных производных с заданной точностью малых членов // Матем. мод.. 2001.Т.13. № 7. С.
- [5] McNeil C.Y. The effect of numerical dissipation on high Reynolds number turbulent flow solutions. AIAA Paper. 1996. N 96-0891. 11p.
- [6] Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука. 1990 г. С. 156-157.
- [7] Пинчуков В. И. Компактная схема шестого порядка для решения уравнений Эйлера// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. №10. С. 1717-1720.
- [8] Пинчуков В. И. Коррекция потоков в многомерных задачах гиперболического и параболического типа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 4. С. 26 - 40.
- [9] Минайлос А. Н. О корректной постановке задач численного решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса. «Фундаментальные исследования для гиперзвуковых технологий». Всеросс. научно-тех. конф. 20-23.10.1998 г. Сб. тр. г. Жуковский: Изд. ЦАГИ. С. 487-494.
- [10] Северинов Л. И. О применении законов изменения количественных мер движения для конечного объёма в конечных приращениях при численном решении задач механики сплошной среды. Сб. «Проблемы аксиоматики в развитии процессов». М.: Труды фирмы «Систем – прогноз». 1993. Вып. 1.С. 66 – 95.
- [11] Гаранджа В.А., Толстых А. И. О численном моделировании нестационарных отрывных течений несжимаемой жидкости на основе компактных аппроксимаций пятого порядка // ДАН СССР.1990. Т.312. № 2. С. 311-314.
- [12] Moretti G. A technique for integrating two-dimensional Euler equations // Comp. and Fluids. 1987. V.15. P.59-75.
- [13] Yamamoto Y., Karashima K. Floating shock fitting for three-dimensional inviscid supersonic flows// AIAA Journal/ 1982. V.20. № 1. P. 9-17.