

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА КОМПОЗИТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

С. К. Голушко

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: golushko@ict.nsc.ru

А. В. Юрченко

Новосибирский государственный университет, Россия

Mathematical modelling of composite parabolic type antenna behaviour leads to solving the series of boundary value problems for rigid systems of ordinary differential equations of higher order with variable coefficients. The number of direct problems calculating the stressed-deformed state of antenna reflector, subjected to self-weight, wind and thermal loads, are solved. Reinforcement layouts for the best structure behaviour are developed.

Введение

Значение телекоммуникационных систем в жизни современного общества трудно переоценить. Появление и развитие средств оперативной связи является одним из наиболее важных факторов значительного ускорения технического прогресса, наблюдаемого в наши дни. Вследствие этого, обеспечение качества, надёжности и доступности связи — одна из основных целей современной инженерии. Для обеспечения связи на далёкие расстояния широко используются методы передачи информации посредством создания узконаправленного и фокусировки рассеянного сигнала, для чего применяются антенны с профилем зеркала в виде параболоида вращения.

Одно из главных эксплуатационных требований, предъявляемых к антеннам — обеспечение минимального отклонения профиля зеркала от заданного. Кроме того, применение антенн в сложных, экстремальных условиях эксплуатации заставляет учитывать возможность разрушения конструкции. Широкие возможности для обеспечения предъявляемых к зеркальным антеннам требований открывает использование композиционных материалов.

1. Постановка задачи и модель армированной оболочки вращения

Рассматривается зеркало антенны, выполненное в виде тонкой армированной оболочки вращения с параболическим или эллиптическим профилем. В качестве параметров, описывающих геометрию поверхности и задающих линейные размеры конструкции, принимаются фокусное расстояние f , диаметр раскрыва зеркала D и толщина оболочки $2h$. Требуется исследовать поведение конструкции в зависимости от структурных и механических характеристик композита при фиксированных параметрах нагружения и закрепления, заданной геометрии и линейных размерах.

При использовании структурной модели армированного слоя [1] связь между осредненными напряжениями $\bar{\sigma} = \|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\|^\top$ и деформациями $\bar{\epsilon} = \|e_1, e_2, e_3\|^\top$ имеет вид

$$\bar{\sigma} = \mathbf{A} \cdot \bar{\epsilon} - \mathbf{B} \cdot \Theta, \quad (1)$$

где Θ — приращение температуры; $\mathbf{A} = \|a_{kl}\|$, $\mathbf{B} = \|b_k\|$ — тензоры механической и температурной жесткости, с компонентами

$$a_{ii} = aE_c + \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^4, \quad a_{iz} = a_{zi} = \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{in}^3 l_{jn}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-15-96172) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (проект 274).

$$\begin{aligned}
a_{12} = a_{21} &= a\nu E_c + \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, & a_{33} &= \frac{\omega_c E_c}{2(1+\nu)} + \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n l_{1n}^2 l_{2n}^2, \\
b_i &= \frac{\omega_c E_c \alpha_c}{1-\nu} + \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n \alpha_n l_{in}^2, & b_3 &= \omega_a \sum_{n=1}^N \omega_n E_n \alpha_n l_{1n} l_{2n}, \\
a &= \frac{\omega_c}{1-\nu^2}, & \omega_a &= 1 - \omega_c, & \omega_n &\geq 0, & \sum_{n=1}^N \omega_n &\leq 1, & l_{1n} &= \cos \psi_n, & l_{2n} &= \sin \psi_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь N — количество семейств армирующих волокон; ω_c, ν — объемное содержание и коэффициент Пуассона связующего; $E_c, E_n, \alpha_c, \alpha_n$ — модули Юнга и коэффициенты температурного расширения связующего и n -го семейства арматуры соответственно; ω_n, ψ_n — удельные интенсивности и углы укладки n -го семейства армирующих волокон. Напряжения в связующем σ_i^c и армирующих элементах $\sigma_{(n)}$ при этом подчиняются закону Дюамеля–Неймана

$$\sigma_i^c = \frac{E_c}{1-\nu^2}(e_i + \nu e_j) - \frac{\alpha_c E_c}{1-\nu} \Theta, \quad \sigma_3^c = \frac{E_c}{1+\nu} e_3,$$

$$\sigma_{(n)} = E_n e_{(n)} - \alpha_n E_n \Theta, \quad e_{(n)} = e_1 l_{1n}^2 + 2e_3 l_{1n} l_{2n} + e_2 l_{2n}^2.$$

Принимается классическая линейная модель тонких оболочек, дающая приближенные представления

$$e_i = \varepsilon_i + \zeta \cdot \varkappa_i, \quad e_3 = \varepsilon_3 + \zeta \cdot 2\varkappa_3, \tag{3}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — нормальные деформации в меридиональном и окружном направлениях соответственно, ε_3 — сдвиг; \varkappa_1, \varkappa_2 — изменения кривизны, \varkappa_3 — кручение срединной поверхности, принятой в качестве отсчетной. Разрешая уравнения равновесия и кинематические соотношения [2] относительно производных по меридианальной координате, учитывая (1), (3) и то, что, когда материал оболочки имеет плоскость симметрии вдоль меридиана, в соотношениях (2) $a_{i3} = a_{3i} = b_3 = 0$, получаем следующую систему уравнений, описывающую поведение армированной оболочки вращения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial s} &= \mu(T_2 - T_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{S}}{\partial \varphi} - k_1 \widehat{Q} + \frac{k_3}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - q_1, \\
\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial s} &= k_1 T_1 + k_2 T_2 - \mu \widehat{Q} - 2 \frac{\mu}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - q_3, \\
\frac{\partial M_1}{\partial s} &= \mu(M_2 - M_1) + \widehat{Q} - \frac{2}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial \widehat{S}}{\partial s} &= \mu k_4 H - 2\mu \widehat{S} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (T_2 + k_2 M_2) - q_2, \\
\frac{\partial u}{\partial s} &= \varepsilon_1 - k_1 w, & \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta_1 + k_1 u, \\
\frac{\partial \vartheta_1}{\partial s} &= \varkappa_1, & \frac{\partial v}{\partial s} &= \varepsilon_3 + \frac{\cos \theta}{r} v - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\
\varepsilon_1 &= \frac{T_1 + T_{1T}}{C_{11}} - a_1 \varepsilon_2, & \varkappa_1 &= \frac{M_1 + M_{1T}}{D_{11}} - a_1 \varkappa_2, \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu u + k_2 w, & \varkappa_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + \mu \vartheta_1, & \vartheta_2 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + k_2 v, \\
\varepsilon_3 &= \frac{\widehat{S}}{C_{33}} + \frac{k_2}{r} \frac{2h^2}{3} \frac{\partial}{\partial \varphi} (k_2 u - \mu w - \vartheta_1), \\
\varkappa_3 &= \frac{k_2 \widehat{S}}{C_{33}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (k_2 u - \mu w - \vartheta_1), & H &= D_{33} \varkappa_3, \\
T_2 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2 - T_{2T}, & M_2 &= D_{12} \varkappa_1 + D_{22} \varkappa_2 - M_{2T},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$T_{iT} = \int_{-h}^{+h} b_i \Theta d\zeta, \quad M_{iT} = \int_{-h}^{+h} b_i \Theta \zeta d\zeta,$$

где s — координата, отсчитываемая вдоль меридиана; φ — угловая координата; ζ — координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности; r — расстояние от срединной поверхности до оси вращения; z — координата, отсчитываемая вдоль оси вращения; θ — угол между нормалью к поверхности и осью вращения; T_i, S — растягивающие и сдвиговое усилия; M_i, H — изгибающие и скручивающий моменты; Q_i — перерезывающие силы; u, v, w — меридианальное, окружное и нормальное перемещения отсчетной поверхности соответственно; ϑ_i — углы поворота нормального элемента в плоскостях $\varphi = \text{const}, s = \text{const}$; q_1, q_2, q_3 — меридианальная, окружная и нормальная приведенные нагрузки; $\widehat{Q} = Q_1 + 1/r \cdot \partial H / \partial \varphi$; $\widehat{S} = S + k_2 H$; $\mu = \cos \theta / r$; k_i — главные кривизны; $C_{ij} = 2ha_{ij}$, $C_{33} = 2ha_{33}$; $D_{ij} = 2h^3 a_{ij} / 3$, $D_{33} = 4h^3 a_{33} / 3$; $a_1 = a_{12} / a_{11}$.

Если форма отсчетной поверхности задается равенством $z = z(r)$, то коэффициенты системы и оператор дифференцирования вдоль меридиана можно разрешить в переменных (r, φ)

$$k_1 = \frac{1}{\gamma^3(r)} \frac{d^2 z}{dr^2}, \quad k_2 = \frac{\sin \theta}{r}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\gamma(r)} \frac{dz}{dr}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\gamma(r)}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \gamma(r) \frac{\partial}{\partial r},$$

где $\gamma(r) = \sqrt{1 + (dz/dr)^2}$.

Дополняя систему (4) условиями склейки по окружной координате и краевыми условиями вида

$$\overline{G}_l \cdot \overline{y}(r_{\min}) = \overline{g}_l(\varphi), \quad \overline{G}_r \cdot \overline{y}(r_{\max}) = \overline{g}_r(\varphi), \quad (5)$$

где $\overline{y} = \|T_1, \widehat{Q}, M_1, \widehat{S}, u, w, \vartheta_1, v\|^\top$; $\overline{G}_l, \overline{G}_r$ — матрицы размерности 8×4 ; $\overline{g}_l(\varphi), \overline{g}_r(\varphi)$ — векторы размерности 4, получаем замкнутую краевую задачу для системы 18 алгебраических и дифференциальных уравнений в частных производных относительно 18 неизвестных функций.

2. Методы решения краевых задач, возникающих при расчете НДС оболочек вращения

Решение краевых задач подобных (4), (5) в их исходном виде представляется весьма затруднительным. Поэтому обычной практикой является сведение исходной краевой задачи к ряду краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении линейных краевых задач чаще всего используется метод разделения переменных с применением тригонометрического базиса [2], автоматически обеспечивающий выполнение краевых условий по окружной координате.

Пусть внешние нагрузки и температурное поле представимы в виде:

$$\begin{aligned} \overline{g}_1(r, \varphi) &= \overline{g}_{1,0}(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [\overline{g}_{1,m}(r) \cos m\varphi + \overline{g}_{1,-m}(r) \sin m\varphi], \\ g_2(r, \varphi) &= g_{2,0}(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [g_{2,m}(r) \sin m\varphi + g_{2,-m}(r) \cos m\varphi], \\ \Theta(r, \varphi, \zeta) &= \Theta_0(r, \zeta) + \sum_{m=1}^{\infty} [\Theta_m(r, \zeta) \cos m\varphi + \Theta_{-m}(r, \zeta) \sin m\varphi], \end{aligned}$$

где $\overline{g}_1 = \|q_1, q_3\|^\top$, $g_2 = q_2$. Пусть также краевые усилия и перемещения (5) представимы в виде рядов Фурье по координате φ , тогда решение задачи можно искать в виде [2]:

$$\begin{aligned} \overline{f}_1(r, \varphi) &= \overline{f}_{1,0}(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [\overline{f}_{1,m}(r) \cos m\varphi + \overline{f}_{1,-m}(r) \sin m\varphi], \\ \overline{f}_2(r, \varphi) &= \overline{f}_{2,0}(r) + \sum_{m=1}^{\infty} [\overline{f}_{2,m}(r) \sin m\varphi + \overline{f}_{2,-m}(r) \cos m\varphi], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\overline{f}_1 = \|T_1, T_2, M_1, M_2, \widehat{Q}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varkappa_1, \varkappa_2, u, w, \vartheta_1\|^\top$, $\overline{f}_2 = \|\widehat{S}, H, \varepsilon_3, \varkappa_3, v, \vartheta_2\|^\top$. После подстановки разложений (6) в систему (4) и домножения уравнений на соответствующие гармоники скалярно в L_2 , задача

сводится к ряду независимых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты в разложениях (6). В общем виде каждая из этих систем записывается следующим образом

$$\frac{d\bar{y}_m}{dr} = \bar{A}_m(r) \cdot \bar{y}_m + \bar{b}_m(r), \quad (7)$$

где $\bar{y}_m = \|T_{1,m}, \hat{Q}_m, M_{1,m}, \hat{S}_m, u_m, w_m, \vartheta_{1,m}, v_m\|^\top$; $\bar{A}_m(r)$ — 8×8 матрица системы с компонентами $\gamma(r) \cdot A_{kl,m}(r)$; $\bar{b}_m(r)$ — свободный вектор с компонентами $\gamma(r) \cdot b_{k,m}(r)$ ($k, l = 1, 2, 3$). Вместе с соответствующими граничными условиями

$$\bar{G}_l \cdot \bar{y}_m(r_{\min}) = \bar{g}_{l,m}, \quad \bar{G}_r \cdot \bar{y}_m(r_{\max}) = \bar{g}_{r,m} \quad (8)$$

система (7) образует замкнутую краевую задачу. Ненулевые элементы $A_{kl,m}$ и $b_{k,m}$ при этом имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11,m} &= \mu(a_1 - 1), \quad A_{12,m} = -k_1, \quad A_{14,m} = \bar{m} \left(\frac{2h^2}{3} k_2 k_3 - 1 \right), \quad A_{15,m} = \mu^2 a_2 + k_2 k_3 \bar{m}^2 D_{33}, \\ A_{16,m} &= \mu(k_2 a_2 - k_3 \bar{m}^2 D_{33}), \quad A_{17,m} = -k_3 \bar{m}^2 D_{33}, \quad A_{18,m} = \mu \bar{m} a_2; \quad A_{21,m} = k_1 + a_1 k_2, \\ A_{22,m} &= -\mu, \quad A_{23,m} = \bar{m}^2 a_1, \quad A_{24,m} = -\frac{4h^2}{3} \mu \bar{m} k_2, \quad A_{25,m} = \mu k_2 (a_2 - 2\bar{m}^2 D_{33}), \\ A_{26,m} &= a_2 \left(k_2^2 + \bar{m}^4 \frac{h^2}{3} \right) + 2\mu^2 \bar{m}^2 D_{33}, \quad A_{27,m} = \mu \bar{m}^2 (2D_{33} + a_3), \quad A_{28,m} = k_2 \bar{m} (a_2 + \bar{m}^2 a_3); \\ A_{32,m} &= 1, \quad A_{33,m} = A_{11,m}, \quad A_{34,m} = -\frac{4h^2}{3} k_2 \bar{m}, \quad A_{35,m} = -2\bar{m}^2 k_2 D_{33}, \quad A_{36,m} = A_{27,m}, \\ A_{37,m} &= \mu^2 a_3 + 2\bar{m}^2 D_{33}, \quad A_{38,m} = \mu k_2 \bar{m} a_3; \quad A_{41,m} = \bar{m} a_1, \quad A_{43,m} = \bar{m} a_1 k_2, \\ A_{44,m} &= 2\mu \left(k_2 k_4 \frac{h^2}{3} - 1 \right), \quad A_{45,m} = \mu \bar{m} (k_2 k_4 D_{33} + a_2), \quad A_{46,m} = A_{28,m} - \bar{m} \mu^2 k_4 D_{33}, \\ A_{47,m} &= \mu \bar{m} (k_2 a_3 - k_4 D_{33}), \quad A_{48,m} = \bar{m}^2 (a_2 + k_2^2 a_3); \quad A_{51,m} = C_{11}^{-1}, \quad A_{55} = -\mu a_1, \\ A_{56,m} &= -A_{21,m}, \quad A_{58,m} = -\bar{m} a_1; \quad A_{65,m} = k_1, \quad A_{67,m} = -1; \quad A_{73,m} = D_{11}^{-1}, \quad A_{76,m} = -\bar{m}^2 a_1, \\ A_{77,m} &= -\mu a_1, \quad A_{78,m} = -A_{43,m}; \quad A_{84,m} = C_{33}^{-1}, \quad A_{85,m} = \bar{m} \left(1 - \frac{2h^2}{3} k_2^2 \right), \\ A_{86,m} &= \frac{2h^2}{3} k_2 \bar{m} \mu, \quad A_{87,m} = \frac{2h^2}{3} k_2 \bar{m}, \quad A_{88,m} = \mu; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{1,m} &= \mu \Delta_{T,m} - q_{1,m}, \quad b_{2,m} = k_2 \Delta_{T,m} + \bar{m}^2 \Delta_{M,m} - q_{3,m}, \quad b_{3,m} = \mu \Delta_{M,m}, \\ b_{4,m} &= \bar{m} (\Delta_{T,m} + k_2 \Delta_{M,m}) - q_{2,m}, \quad b_{5,m} = T_{1T,m} C_{11}^{-1}, \quad b_{7,m} = M_{1T,m} D_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $k_3 = k_1 + k_2$, $k_4 = k_1 - k_2$; $\bar{m} = m/r$; $a_2 = C_{22} - a_1 C_{12}$, $a_3 = D_{22} - a_1 D_{12}$; $\Delta_{T,m} = a_1 T_{1T,m} - T_{2T,m}$, $\Delta_{M,m} = a_1 M_{1T,m} - M_{2T,m}$.

Несмотря на такое значительное упрощение исходной задачи, остается по крайней мере еще одна проблема — получаемые системы ОДУ являются жесткими. Это обусловлено как высоким порядком этих систем, так и наличием в них малых параметров, таких как h/R_i и E_c/E_n , где $R_i = 1/k_i$ — главные радиусы кривизны. Кроме того, для оболочек сложной геометрической формы и/или с переменными вдоль меридиана параметрами армирования, матрица системы существенно зависит от меридианальной координаты. Перечисленные обстоятельства приводят к тому, что отношение

$$\Lambda_m(r) = \frac{\max_j |Re \lambda_j(\bar{A}_m(r))|}{\min_j |Re \lambda_j(\bar{A}_m(r))|},$$

где $\lambda_j(\bar{A}_m(r))$ — собственные значения матрицы $\bar{A}_m(r)$, становится много больше единицы.

На рис. 1 слева представлены зависимости величин $\Lambda_m(r)$ от радиуса и номера гармоники при расчете НДС алюминий-углеродного (сплошные линии) и титан-углеродного (пунктир) зеркал. Цифры при этом

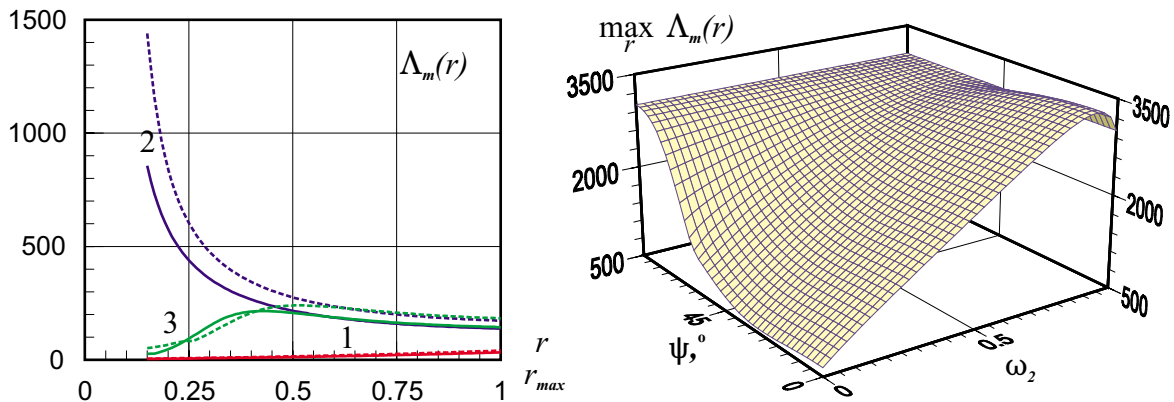


Рис. 1.

соответствуют: осесимметричным компонентам решения при $m = 0$ (кривые 1), антисимметричным компонентам при $m = -1, 1$ (кривые 2) и циклически симметричным компонентам при $m = -2, 2$ (кривые 3). Видно, что величина $\Lambda_m(r)$ существенно зависит от меридианальной координаты. Кроме того, при расчете различных гармоник меняется как количественная, так и качественная картина этой зависимости, при этом максимальные из представленных значений достигаются для антисимметричных компонент. Также видно, что жесткость системы, характеризуемая величиной $\Lambda_m(r)$, в значительной мере зависит и от механических характеристик материалов, составляющих КМ. Представленная на рис. 1 справа зависимость от структурных параметров КМ величины $\max_r \{\Lambda_m(r)\}$, характеризующей спектр матрицы системы, возникающей при расчете антисимметричных компонент НДС титан-углеродного зеркала, показывает существенное влияние структуры армирования на жесткость системы. Так, на приведенном рисунке эта величина изменяется почти в шесть раз.

Жесткие задачи характеризуются повышенной неустойчивостью к численному счету. Если при интегрировании задач Коши для жестких систем проблема преодоления численной неустойчивости достаточно хорошо разработана [3, 4] и др., то решение краевых задач для жестких систем — значительно более сложная проблема. Для ее решения предложено несколько алгоритмов, среди которых был выбран метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова [5].

Изложенный подход применялся для решения ряда задач расчета НДС оболочечных конструкций, в частности армированных резервуаров и сосудов давления [6, 7]. Ниже рассматривается его применение при расчете армированных зеркальных антенн.

3. Зеркало под действием собственного веса

Рассмотрим поведение зеркала параболической антенны с диаметром раскрытия 4 м и фокусным расстоянием 1.5 м, жестко закрепленного в центре по радиусу 0.3 м. Ось антенны направлена под углом $\beta = 45^\circ$ к поверхности земли. Такое положение может соответствовать, например, антенне, принимающей или передающей сигнал через искусственный спутник Земли. Конструкция изготовлена из алюминия ($\rho_c = 2.68 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_c = 70$ ГПа, $\sigma_c^* = 170$ МПа), армированного высокомодульным углеродным волокном Р-100 ($\rho_n = 1.9 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_n = 780$ ГПа, $\sigma_n^* = 2.5$ ГПа) с объемным содержанием $\omega_a = 0.3$, под действием собственного веса. Осредненная по толщине плотность $\rho \approx 2.446 \cdot 10^3$ кг/м³, толщина зеркала $2h = 0.02$ м. Арматура распределяется в три семейства — окружное и два спиральных. При этом $\psi = \psi_1 = -\psi_3$ — угол укладки спиральных семейств арматуры, а интенсивности ω_1 и ω_3 связаны с ω_2 соотношением $\omega_1 = \omega_3 = (1 - \omega_2)/2$. Собственный вес создает осесимметричное и антисимметричное нагружения, чему соответствуют разрешающие системы (7), (8), при $m = 0$ и $m = -1$ соответственно. Приведенные нагрузки при этом задаются выражениями

$$q_{1,0} = -2h\rho g \cdot \cos \beta \sin \theta, \quad q_{2,0} = 0, \quad q_{3,0} = 2h\rho g \cdot \cos \beta \cos \theta,$$

$$q_{1,-1} = -2h\rho g \cdot \sin \beta \cos \theta, \quad q_{2,-1} = -2h\rho g \cdot \sin \beta, \quad q_{3,-1} = -2h\rho g \cdot \sin \beta \sin \theta.$$

Для сравнения рассматривается алюминиевое зеркало тех же размеров.

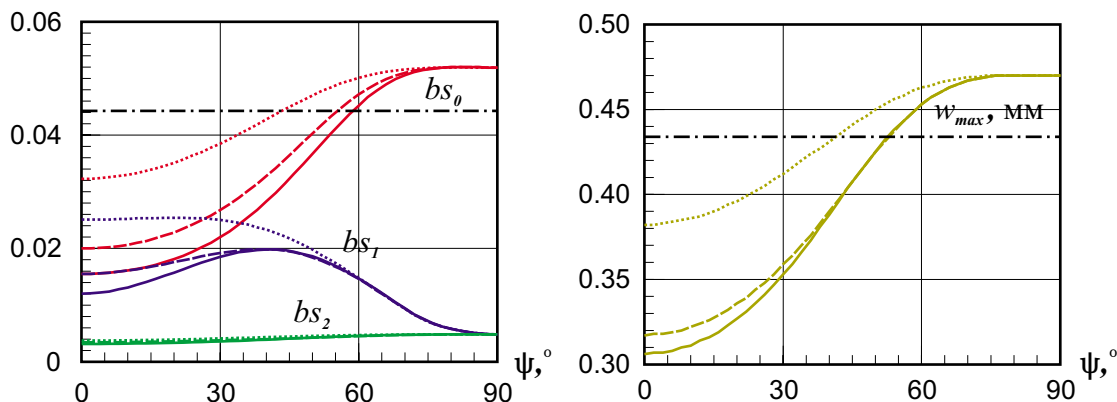


Рис. 2.

На рис. 2 представлены зависимости максимальных приведенных напряжений в матрице bs_0 , спиральных bs_1 и окружном bs_2 семействах арматуры и максимальных прогибов w_{max} от угла укладки спиральных семейств волокон ψ . Различные варианты на графиках соответствуют значениям $\omega_2 = 0$ (сплошные кривые); 0.4 (длинный пунктир); 0.8 (короткий пунктир), а пунктиром с точкой — максимальные прогибы и максимальные приведенные напряжения алюминиевой конструкции. Видно, что армирование может как улучшить, так и ухудшить жесткостные и прочностные характеристики конструкции. Так укладка всей арматуры вдоль меридианов снижает напряжения в матрице почти в 3 раза по сравнению с алюминиевой конструкцией, а прогибы почти в 1.5 раза. Хорошо просматривается перераспределение напряжений между материалами матрицы и волокон спиральных семейств, напряжения в волокнах окружного семейства при этом меняются незначительно. Все это служит сильным аргументом в пользу проведения предварительных исследований перед применением КМ для изготовления зеркал антенн, работающих в тех или иных условиях нагружения.

В целом видно, что при воздействии только собственного веса конструкция остается в упругом состоянии при любых параметрах армирования, и в качестве основного критерия выбора механических и структурных параметров КМ при изготовлении зеркал антенн, основной нагрузкой которых является собственный вес, можно принять соответствие отклонений профиля зеркала предъявляемым техническим требованиям. Показано, что применением высокомодульных армирующих волокон можно добиться выполнения этого критерия, не увеличивая при этом веса конструкции (вес алюминиевого зеркала равен ≈ 728.5 кг, а армированной конструкции ≈ 665 кг, т. е. на 9.5% меньше).

4. Зеркало под действием собственного веса, температурной и ветровой нагрузок

Использование ЗА на крышах высотных зданий и открытых площадках приводит к необходимости учета сильных ветровых и температурных нагрузок. Рабочими ветровыми нагрузками для таких антенн являются давления в $600 \div 800$ кг/м², что соответствует скоростям ветра порядка 20 м/с. Кроме этого, антенны, используемые в подобных условиях, должны быть рассчитаны на нагрузки, соответствующие ураганам ветрам со скоростями 40 м/с и выше. Давление ветра при этом может достигать 3000 кг/м² и более. Поэтому проведение исследований по применению зеркальных антенн на доступных таким ветрам площадках обязательно должно включать исследования прочности при сильных ветровых нагружениях.

Ветер, как и собственный вес, создает симметричное и антисимметричное нагружения, но так как плоскости антисимметрии собственного веса и ветра, в общем случае, могут не совпадать, то ветровая нагрузка будет соответствовать гармоникам с номерами $m = -1, 0, 1$. Будем пренебрегать касательными к поверхности составляющими нагрузки, тогда к $q_{3,m}$ добавляются слагаемые

$$q_{3,-1}^w = p \sin \theta \cdot v_y, \quad q_{3,0}^w = -p \cos \theta \cdot v_z, \quad q_{3,1}^w = p \sin \theta \cdot v_x, \quad (9)$$

где p — сила давления, а $\|v_x, v_y, v_z\|$ — направление ветра в ортонормированной системе координат с началом отсчета в точке, соответствующей $s = 0$, и осями: $0z$, направленной вдоль оси симметрии по

направлению к фокусу зеркала; Ox — параллельной поверхности земли; Oy — перпендикулярно к плоскости Oxz , с положительным направлением, направленным от поверхности земли.

Рассмотрим зеркало параболической антенны с диаметром раскрыва 4 м и фокусным расстоянием 1.5 м, выполненной в виде оболочки постоянной толщины $2h = 0.02$ м. Ось антенны направлена под углом 45° к поверхности земли, на антенну дует сильный боковой ветер, создающий давление $p=1400$ кг/м². Пусть также зеркало антенны нагрелось до температуры 95°C (например, вследствие интенсивного облучения солнечной радиацией). Рассмотрим, как будет себя вести при этом алюминиевая конструкция, армированная, как и ранее, тремя семействами высокомодульного углеродного волокна P-100.

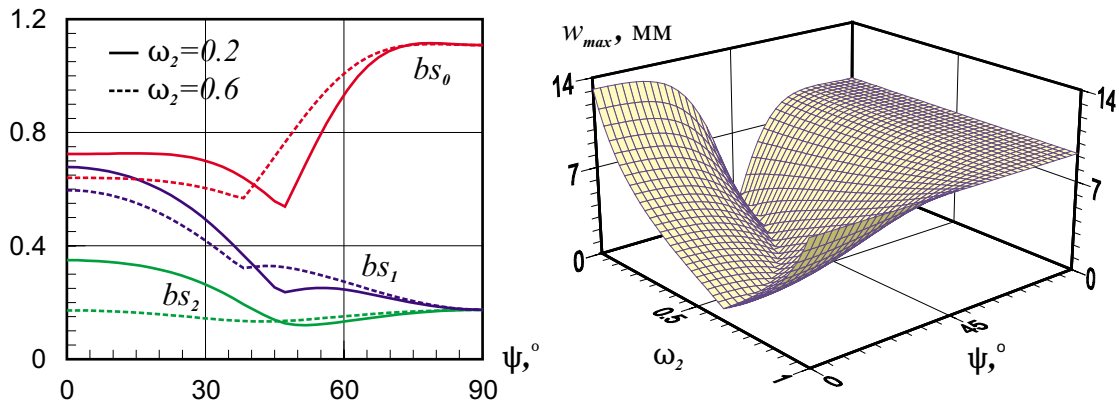


Рис. 3.

Учет ветровой и температурной нагрузок приводит к существенному увеличению напряжений как в матрице, так и в арматуре (рис. 3, слева). Видно, что алюминиевая матрица не всегда выдерживает такое нагружение, но, тем не менее, удачное армирование может предотвратить ее разрушение. Проблемы с обеспечением жесткости зеркала также преодолимы: подбором параметров армирования можно уменьшить прогибы до $0.9 \div 2$ мм, в то время как при их неудачном выборе максимальные прогибы достигают 13 мм (рис. 3, справа).

Такую картину прогибов можно посчитать неудовлетворительной. Повышение жесткости обычно достигается применением высокомодульных материалов. Например, можно использовать в качестве матрицы титановую. Посмотрим, сможет ли это увеличить жесткость зеркала? Исследуем зеркало антенны с такими же геометрическими параметрами и армирующими элементами, как и в случае с алюминий-углеродной конструкцией, но с матрицей, изготовленной из титана ($\rho_c = 4.5 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_c = 110$ ГПа, $\alpha_c = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$ и $\sigma_c^* = 600$ МПа).

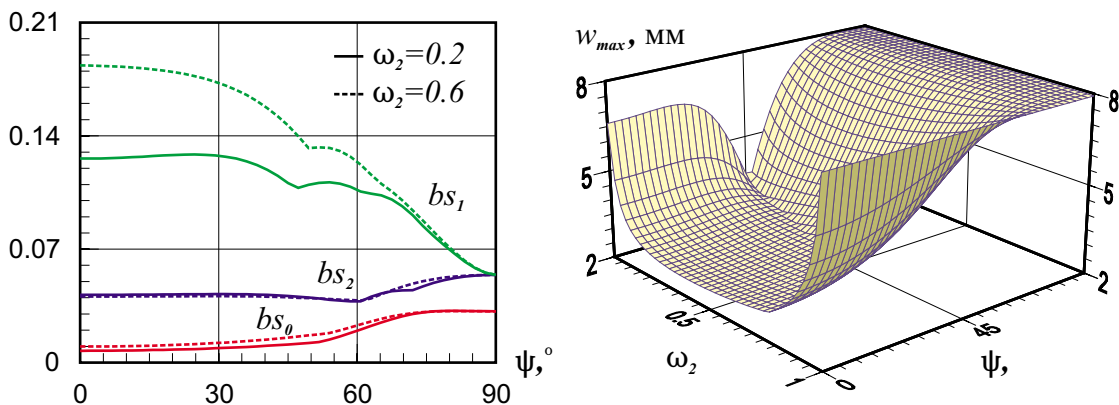


Рис. 4.

Первое, что бросается в глаза — это качественно отличная картина зависимости максимальных прогибов от параметров армирования (рис. 4, справа). Появился большой участок параметров, при которых прогибы меньше 3 мм, и теперь это не полоса, как в случае алюминиевой матрицы, а область почти прямоугольной формы. Заметим, что при всех углах укладки спиральных семейств минимальные значения прогибов достигаются только при наличии определенного, ненулевого количества окружной арматуры,

тем самым показывая ее необходимость. Стоит отметить, что напряжения в элементах композиции при этом значительно снизились (рис. 4, слева), а вследствие значительно более высокого предела прочности титановая матрица остается в упругом состоянии при любых значениях структурных параметров КМ. Приведенные напряжения в арматуре при этом были менее 0.65 для всех рассматриваемых параметров укладки волокон и менее 0.2 для большинства из них.

Тем не менее минимальные прогибы ЗА с титановой матрицей почти в 3 раза больше таковых у зеркала с алюминиевой матрицей, т.е. использование более высокомодульной матрицы не всегда улучшает жесткостные качества конструкции. Дополнительно отметим, что при таком нагружении алюминиевая изотропная конструкция разрушилась бы ($bs_0 = 1.53$), а прогибы в титановом зеркале, оставшемся в упругом состоянии, достигли бы значительной величины — 7.4 мм, тогда как в одном из вариантов с алюминиевой матрицей и углеродными волокнами они достигают всего лишь 0.9 мм.

5. Обеспечение достоверности расчетов

Вопрос о применимости метода дискретной ортогонализации к решению задач расчета НДС оболочечных конструкций из композитных материалов представляет большой интерес. Ранее (см. [6] — [10]) для этого успешно применялся метод сплайн-коллокации, реализованный в пакете прикладных программ COLSYS [11, 12], для которого известна теоретическая оценка погрешности. Поэтому первым шагом в оценке применимости метода дискретной ортогонализации к подобным задачам стало сравнение получаемых с его помощью результатов с результатами расчетов методом сплайн-коллокации. В работах [6, 7] проводилось сравнение результатов расчетов, полученных двумя вышеназванными численными методами, на задачах расчета НДС комбинированных резервуаров и сосудов высокого давления. Относительные разности при этом не превышали 0,34% для подкрепленных шпангоутами конструкций и 0,05% для гладкосопряженных.

Т а б л и ц а 1

GMDO	$P = 100$	$P = 200$	$P = 400$	$P = 800$
COLSYS	$TOL = 10^{-4}$	$TOL = 10^{-6}$	$TOL = 10^{-8}$	$TOL = 10^{-10}$
$m = -1$	$4.46 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-7}$	$6.09 \cdot 10^{-9}$
$m = 0$	$2.81 \cdot 10^{-5}$	$1.73 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$
$m = 1$	$4.17 \cdot 10^{-4}$	$1.82 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$	$5.98 \cdot 10^{-9}$

В табл. 1 приведены значения относительных разностей результатов, полученных методами сплайн-коллокации (COLSYS) и дискретной ортогонализации (GMDO) на задачах расчета НДС зеркала параболической формы, отдельно по гармоникам. Здесь TOL — задаваемая пакету COLSYS точность. Для представленных в таблице результатов относительная разница не превышает 0.05%, что позволяет сделать вывод о достаточной точности обоих методов. Сближение результатов, при увеличении размера сетки P для метода дискретной ортогонализации и уменьшении значения TOL , указывает на сходимость обоих методов. При анализе результатов сравнения отмечено, что при увеличении размера сетки для метода ортогонализации в два раза, погрешность уменьшается приблизительно в 16 раз. Таким образом, метод имеет четвертый порядок сходимости, что совпадает с теоретическим порядком интегрирующей процедуры (для интегрирования использовался метод Рунге — Кутты — Мерсона четвертого порядка).

Т а б л и ц а 2

$m = -1$			$m = 0$			$m = 1$		
δ	t_{colsys}	t_{gmdo}	δ	t_{colsys}	t_{gmdo}	δ	t_{colsys}	t_{gmdo}
$5.5 \cdot 10^{-4}$	100	15	$1.4 \cdot 10^{-5}$	150	30	$5.9 \cdot 10^{-4}$	100	10
$1.2 \cdot 10^{-6}$	280	70	$6 \cdot 10^{-7}$	270	80	$1.2 \cdot 10^{-6}$	270	70
$4.5 \cdot 10^{-8}$	520	170	$2.7 \cdot 10^{-8}$	590	190	$4.4 \cdot 10^{-8}$	530	170

Серия дополнительных расчетов позволяет построить таблицу сравнительной эффективности методов ортогонализации С. К. Годунова и сплайн-коллокации (табл. 2). Здесь δ — относительная погрешность,

а t_{colsys} и t_{gmdo} — время расчета на ПЭВМ с процессором Pentium Celeron-450MHz в миллисекундах методами сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. С точки зрения временных затрат, метод дискретной ортогонализации значительно превосходит метод сплайн-коллокации: во всех случаях процедура GMDO оказывается в 3 — 6 раз быстрее процедуры COLSYS, хотя, при увеличении требований к точности, процентная разница во времени счета уменьшается.

Выводы

Анализ задач расчета НДС армированного параболического рефлектора, нагруженного собственным весом показал: конструкция остается недогруженной, что позволяет выбирать структуру армирования, исходя из предъявляемых требований на жесткость. Сравнение с изотропной алюминиевой конструкцией показало, что армирование может как улучшить, так и ухудшить технические характеристики зеркала. Наличие ветровой и температурной нагрузок может привести как к нежелательным деформациям рефлектора, так и к разрушению конструкции. При этом установлено, что удачное армирование может предотвратить разрушение зеркала и значительно снизить деформации.

Показано существенное влияние механических характеристик материалов, составляющих КМ, на поведение конструкции — в зависимости от параметров армирования, напряжения в матрице изменяются более чем в 2 раза, в армирующих волокнах более чем в 7 раз, максимальные прогибы изменяются более чем в 12 раз. При этом меняются не только количественные характеристики зависимостей жесткости и прочности конструкции от параметров армирования, но и их качественная картина. Показано, что применение, например, более жесткой матрицы не всегда оправдано с точки зрения уменьшения отклонения профиля зеркала.

Для численного решения краевой задачи реализован алгоритм метода дискретной ортогонализации С.К. Годунова. Для обеспечения достоверности численных результатов расчеты проводились с использованием двух различных методов — метода дискретной ортогонализации и метода сплайн-коллокации. Сравнение результатов позволило сделать вывод о достаточной точности расчетов и высокой эффективности метода дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Список литературы

- [1] Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986.
- [2] Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992.
- [3] Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. пер. с англ. М.: Мир, 1988.
- [4] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, Сиб. предприятие РАН, 1997.
- [5] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
- [6] Голушко С.К., Горшков В.В., Юрченко А.В. Анализ поведения армированного сосуда в геометрически нелинейной постановке // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики. 1999. Вып. 114. С. 155–160.
- [7] Голушко С.К., Горшков В.В., Юрченко А.В. О двух численных методах расчета сопряженных композитных конструкций // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Материалы V научной конференции, ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999. Красноярск, 1999. С. 49–55.
- [8] GOLUSHKO S.K. Direct and inverse problems in mechanics of composite shells // Proc. of The Sixth Japan-Russia Joint Symp. on Computational Fluid Dynamics, Nagoya University, Nagoya, Japan, 1998. P. 125–130.
- [9] Голушко С.К., Немировский Ю.В., Одновал С.В. Особенности поведения армированных куполов при несимметричном нагружении // Труды ИГАСУ. 1998. № 1(1). С. 37–43.

-
- [10] Голушко С. К., Немировский Ю. В., Одновал С. В. Начальное разрушение армированных куполов и сводов при несимметричном нагружении // Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф: Материалы V научной конференции, ИВМ СО РАН, Красноярск, 1999. Красноярск, 1999. С. 44–48.
- [11] ASCHER U., CHRISTIANSEN J., RUSSEL R. D. Collocation software for boundary value ODEs // ACM. Trans. on Math. Software. 1981. Vol. 7, № 2. P. 209–222.
- [12] Слепцов А. Г., Шепеленко В. Н. Пакет программ решения многоточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1988. (Препр. / СО АН СССР. ИТПМ; № 8–88).