

Моделирование неустойчивостей токовых слоев в идеальной плазме с учетом эффектов Холла

И. Л. Аршукова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск

Для математического описания космической плазмы широко используются уравнения магнитной гидродинамики (МГД). При исследовании крупномасштабных явлений применим подход идеальной МГД. Однако, для изучения мелкомасштабных процессов используются МГД уравнения с учетом эффектов Холла.

Тонкие токовые слои являются типичными мелкомасштабными образованиями в космической плазме, которые можно изучать на основе холловской МГД. Примерами таких структур служат тонкие слои, образующиеся на границах магнитосфер и ионосфер планет при обтекании их солнечным ветром.

Неустойчивости, развивающиеся в токовых слоях, приводят к их локальным разрушениям. Известная гидродинамическая неустойчивость Кельвина - Гельмгольца может развиваться при наличии градиента фоновой скорости. В холловской МГД эта неустойчивость усиливается за счет градиента плотности электрического тока.

В данной работе рассматривается неустойчивость Кельвина - Гельмгольца тонких токовых слоев на основе холловской МГД. После линеаризации уравнений и преобразования Фурье получено дифференциальное уравнение второго порядка на амплитуду возмущения полного давления. С целью получить аналитическое решение используется упрощенная модель, в которой магнитное поле и параметры плазмы предполагаются кусочно - постоянными в токовом слое и в смежных областях. Интегрированием дифференциального уравнения поперек разрывов определены граничные соотношения, используемые для сшивки решений в разных областях. В результате получено дисперсионное уравнение, имеющее аналитическое решение. Найденный инкремент неустойчивости является возрастающей функцией волнового числа и убывающей функцией толщины токового слоя.

*Полученные результаты применены к исследованию неустойчивости, возникающей на границе ионосферы Венеры. Для характерных параметров время нарастания неустойчивости получено равным $0.2 * R/U_{sw}$, где R - радиус ионосферы Венеры, а U_{sw} - скорость солнечного ветра. Это время намного меньше характерного времени обтекания планеты солнечным ветром $2.6 * R/U_{sw}$. Следовательно, рассмотренная неустойчивость может достигать нелинейной стадии.*

Введение

Уравнения магнитной гидродинамики - подход, широко используемый для описания явлений в космической плазме. При исследовании крупномасштабных процессов применяется подход идеальной МГД. Такой фактор, как учет эффектов Холла в магнитогидродинамических уравнениях, важен при изучении мелкомасштабных явлений.

В данной работе на основе холловской МГД исследуется неустойчивость токовых слоев. Токовые слои являются типичными образованиями в космической плазме, возникающими на границах раздела плазм и магнитных полей различного происхождения. Типичными примерами таких структур служат границы магнитосфер и ионосфер планет, магнитных облаков, фронты смена знака межпланетного магнитного поля (ММП).

В токовых слоях возможно развитие различных неустойчивостей. Неустойчивости приводят к локальному разрушению слоя и диффузии плазм и магнитных полей.

Неустойчивость Кельвина - Гельмгольца, широко известная и подробно исследованная в гидродинамике, развивается при наличии градиента фоновой скорости. В холловской МГД эта неустойчивость усиливается за счет градиента плотности электрического тока.

Данная работа посвящена исследованию неустойчивости Кельвина - Гельмгольца тонких токовых слоев на основе холловской МГД модели.

Постановка задачи

Рассмотрим тонкий токовый слой в космической плазме, разделяющий среды различного происхождения. Для исследования неустойчивости токового слоя запишем холловские МГД уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{\rho} \nabla P &= -\frac{1}{c\rho} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]; & \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{U} \times \mathbf{B}] &= \frac{m_i}{\rho e c} [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]; \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; & \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0; & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{U} - скорость потока, ρ - плотность плазмы, P - плазменное давление, \mathbf{E} и \mathbf{B} - электрическое и магнитное поля, соответственно, c - скорость звука, e и m_i - заряд и масса протонов. По аналогии с [2] предполагается, что электрический ток: $\mathbf{J} = ne\mathbf{U}$.

Для удобства математических расчетов введем безразмерные параметры - все величины нормированы к параметрам солнечного ветра (скорости U_{sw} и плотности ρ_{sw}) и линейному масштабу (L)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{L}; & k &= k \cdot L; & \rho &= \frac{\rho}{\rho_{sw}}; & U &= \frac{U}{U_{sw}}; \\ \omega &= \omega \cdot \frac{L}{U_{sw}}; & t &= t \cdot \frac{U_{sw}}{L}; & \delta &= \frac{\delta}{L} = \frac{1}{L} \cdot \frac{c \cdot m_i}{\sqrt{4\pi \rho_{sw}} \cdot e}; \\ P &= \frac{P}{\rho_{sw} U_{sw}^2}; & B &= \frac{B}{\sqrt{4\pi \rho_{sw}} \cdot U_{sw}}; & J &= \frac{J}{\sqrt{4\pi \rho_{sw}} \cdot U_{sw}^2 / L}. \end{aligned}$$

Здесь и далее все величины записаны в безразмерной форме.

Введем малые возмущения магнитного поля и параметров плазмы

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* + \mathbf{b}, \quad P = P^* + p, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^* + \mathbf{u},$$

где $|\mathbf{b}| \ll |\mathbf{B}|$, $p \ll P$, $|\mathbf{u}| \ll |\mathbf{U}|$. Линеаризуя задачу по малым параметрам, полагаем все возмущения пропорциональными комплексной экспоненциальной функции $\exp(i \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \omega t))$, где \mathbf{s} - двумерный вектор в плоскости (y,z) [3].

Для упрощения вычислений выберем следующие направления векторов фоновых параметров: $\mathbf{B}^* = (0, 0, B^*)$; $\mathbf{J}^* = (0, J^*, 0)$; $\mathbf{U}^* = (0, U^*, 0)$; $\mathbf{k} = (0, k, 0)$.

В результате получено дифференциальное уравнение второго порядка на фурье амплитуду возмущения полного давления

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho \Omega^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) - \frac{k^2}{\rho \Omega^2} \pi = 0, \quad \Omega = \omega - kU^*. \quad (2)$$

В реальной ситуации профили магнитного поля и электрического тока являются плавными функциями, и уравнение (2) может быть решено только численно. Для того, чтобы получить аналитическое решение в первом приближении для оценки инкремента неустойчивости, используем упрощенную модель с кусочно-постоянными параметрами. Аналогичный подход был использован в работе [6] при расчетах инкремента перестановочной неустойчивости подсолнечной магнитопаузы Земли. Следуя этой работе, приближение кусочно-постоянных параметров дает немного завышенный результат для инкремента неустойчивости.

Таким образом, рассмотрим три области: токовый слой (область 1) и прилегающие к нему смежные области (области 0 и 2). Интегрируя уравнение (2) на возмущения полного давления поперек каждой границы токового слоя и смежных областей, получаем следующие условия

$$\left(\frac{1}{\rho \Omega^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) \Big|_0^1 = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho \Omega^2} \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) \Big|_1^2 = 0. \quad (3)$$

Ищем решение уравнения (2) в трех областях в следующем виде

$$\pi_0 = c_0 \cdot e^{k(x-1)}; \quad \pi_2 = c_2 \cdot e^{-k(x-1)}; \quad \pi_1 = c_{11} \cdot e^{k(x-1)} + c_{12} \cdot e^{-k(x-1)}. \quad (4)$$

В предположении, что величина массовой плотности в одной из областей (области 0) велика по сравнению с плотностью солнечного ветра положим $\rho_0 = \rho_0 / \rho_{sw} \rightarrow \infty$.

В этом приближении в результате решения системы уравнений совместно с граничными условиями (3) получаем следующее дисперсионное уравнение

$$\omega^2 \cdot \{ \rho_1(1 + e^{2ka}) - \rho_2(1 - e^{2ka}) \} - \omega \cdot 2(Uk) \cdot \rho_1(1 + e^{2ka}) + (Uk)^2 \cdot \rho_1(1 + e^{2ka}) = 0. \quad (5)$$

Решения уравнения (5) записываются в следующем виде

$$\omega_{1,2} = \frac{(Uk) \cdot \rho_1(1 + e^{2ka})}{\rho_1(1 + e^{2ka}) - \rho_2(1 - e^{2ka})} \pm i \cdot \frac{(Uk) \cdot \sqrt{\rho_1 \rho_2 (e^{4ka} - 1)}}{\rho_1(1 + e^{2ka}) - \rho_2(1 - e^{2ka})}, \quad U = \frac{4\pi}{c} \frac{\delta}{\rho_1} J.$$

Неустойчивой моде соответствует решение с положительной мнимой частью.

Результаты

Рассмотренное приближение соответствует ситуации, возникающей, в частности, при взаимодействии солнечного ветра с ионосферами таких планет как Венера и Марс. Рассмотрим холловскую неустойчивость Кельвина - Гельмгольца, возникающую на границе ионосферы Венеры.

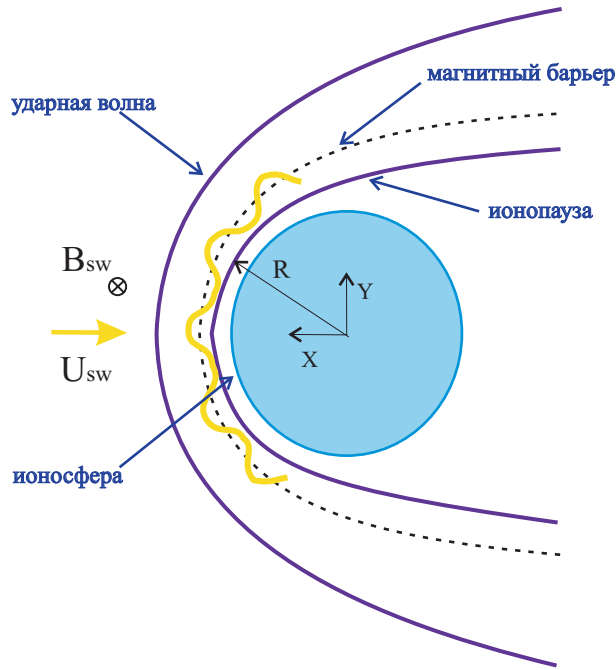


Рис. 1: Иллюстративная картинка: взаимодействие солнечного ветра с ионосферой Венеры.

В результате обтекания планеты солнечным ветром на границе ионосферы формируются ударная волна, магнитный барьер и ионопауза (см. *рис. 1*).

Следуя результатам, полученным из идеальной МГД модели обтекания Венеры солнечным ветром в работе [1], магнитное поле и параметры плазмы изменяются вдоль подсолнечной линии от ионопаузы ($x/R = 1$) до ударной волны как показано на *рис. 2*. Кривые на этих графиках соответствуют различным значениям параметра загрузки q : $q = m_0 n_0 \nu R / (\rho_{sw} U_{sw})$, где m_0, n_0 - масса и плотность нейтральных частиц подсолнечной ионопаузы, ν - скорость образования ионов, R - радиус подсолнечной ионопаузы. Типичным значением параметра загрузки для Венеры является значение $q \sim 0.5$.

Магнитное поле достигает своего максимального значения на магнитном барьере. Как видно из рисунка, существует сильная вариация магнитного поля вблизи границы ионосферы. Таким образом, магнитный барьер является токовым слоем, на котором может развиваться неустойчивость (*рис. 3*).

Рассмотрим три области: ионосферу (область 0), токовый слой (область 1) и переходную область (область 2). Известно, что величина массовой плотности внутри ионосферы Венеры вблизи ионопаузы в подсолнечной области $\rho_0 \sim 10^5 \rho_{sw}$ [5]. Таким образом, при численных расчетах можем полагать $\rho_0 = \rho_0 / \rho_{sw} \rightarrow \infty$. Для оценки инкремента неустойчивости воспользуемся полученным дисперсионным уравнением (5).

На *рис. 4* приведены зависимости частоты и инкремента неустойчивости от толщины токового слоя. Как видно из графика инкремент неустойчивости растет с уменьшением толщины токового слоя.

На *рис. 5* инкремент неустойчивости представлен как функция параметра ka для различных значений толщины токового слоя.

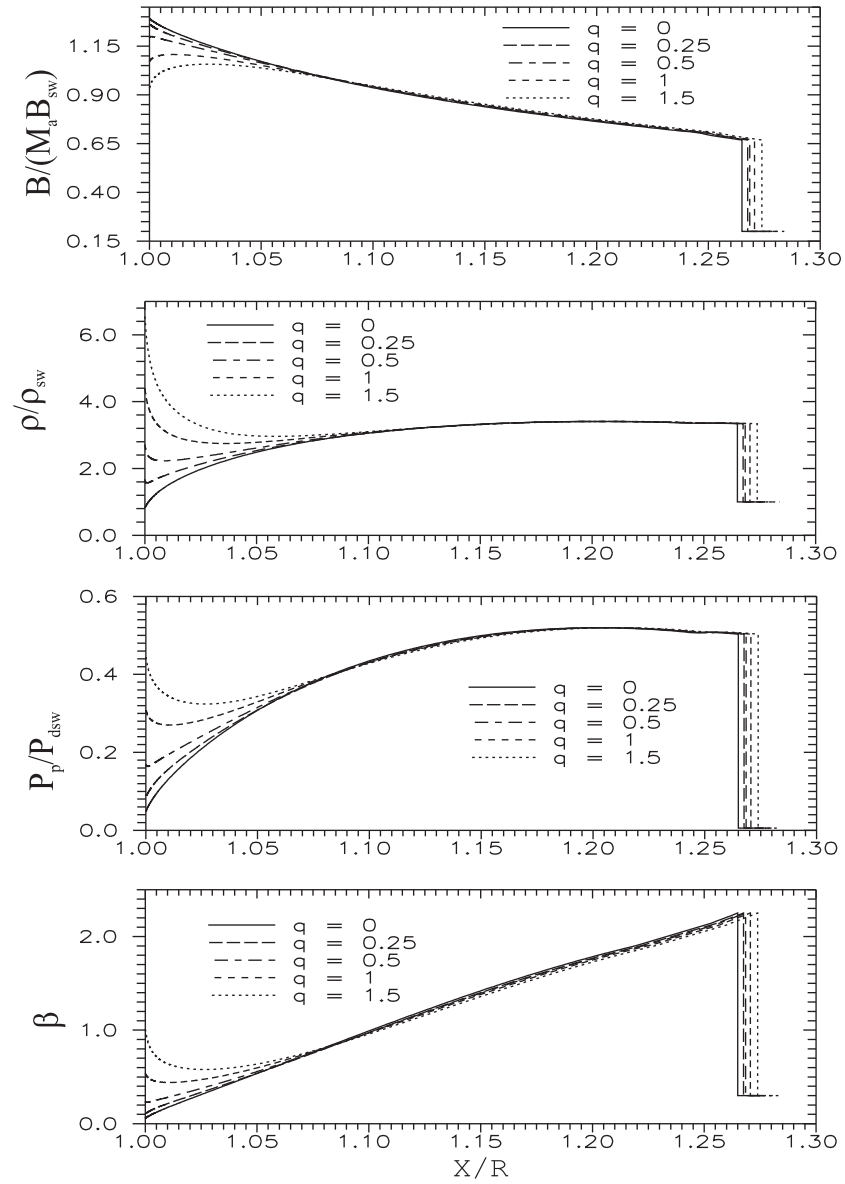


Рис. 2: Профили магнитного поля, плотности плазмы, давления и β параметра вблизи ионосферы Венеры, полученные из идеальной МГД модели обтекания Венеры солнечным ветром в работе [1] ($x/R = 1$ соответствует границе ионосферы, $x/R = 1.27$ - ударной волне).

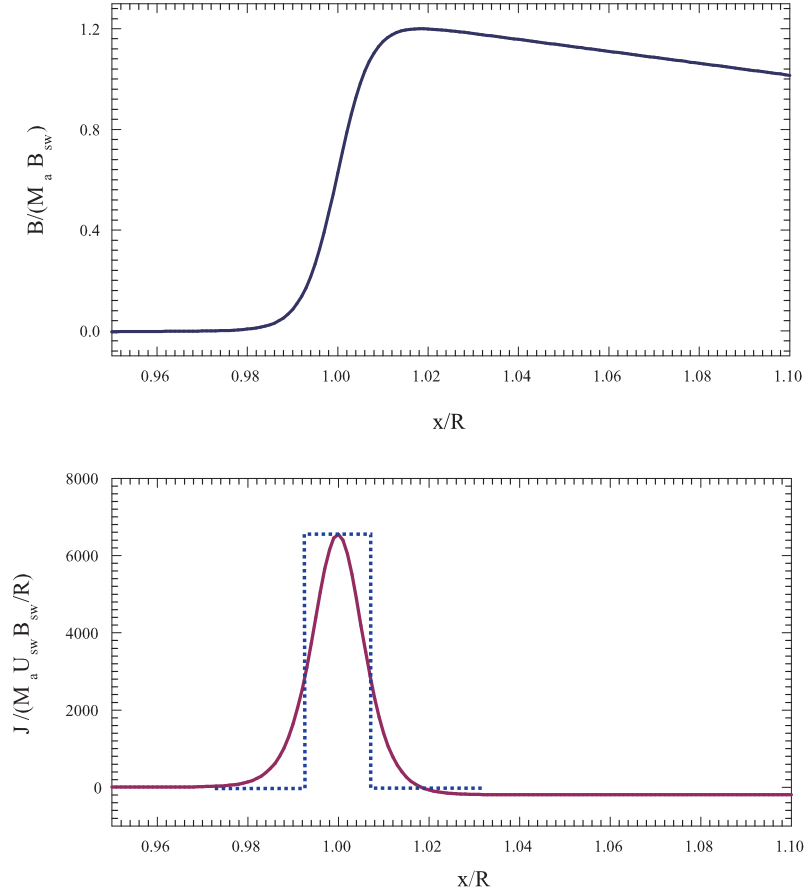


Рис. 3: Аппроксимация магнитного поля и электрического тока, $a/R = 0.015$.

Таким образом, для характерных параметров подсолнечной области Венеры $r_1/r_{sw} \sim 10$, $r_2/r_{sw} \sim 3$, $a \sim 100$ км, $R \sim 6350$ км, соответствующих $a/R \sim 0.015$, для $k \sim 50/R$ ($k^{-1} \sim 130$ км) получаем следующую оценку инкремента неустойчивости $\gamma \sim 5.3 \cdot \frac{U_{sw}}{R}$. Это много больше значения инкремента $\gamma \sim 0.5 \cdot \frac{U_{sw}}{R}$, полученного в работе [4] при исследовании перестановочной неустойчивости, развивающейся в этой же области. Время развития неустойчивости составляет $\tau = \frac{1}{\gamma} \approx 0.19 \cdot \frac{R}{U_{sw}}$, что много меньше характерного времени формирования магнитного барьера $\tau_m \sim 2.6 \cdot \frac{R}{U_{sw}}$ [4]. Таким образом, можно заключить, что неустойчивость может развиваться и достичь нелинейной стадии.

Возмущения распространяются вдоль ионопаузы к флангам, где они могут быть усилены за счет развития неустойчивости Кельвина - Гельмгольца, связанной с разрывом фоновой скорости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-05-20014, 04-05-64088, гранта 14G095 Красноярского краевого фонда науки, а также проекта 2.15.2 программы ОФН - 16 РАН.

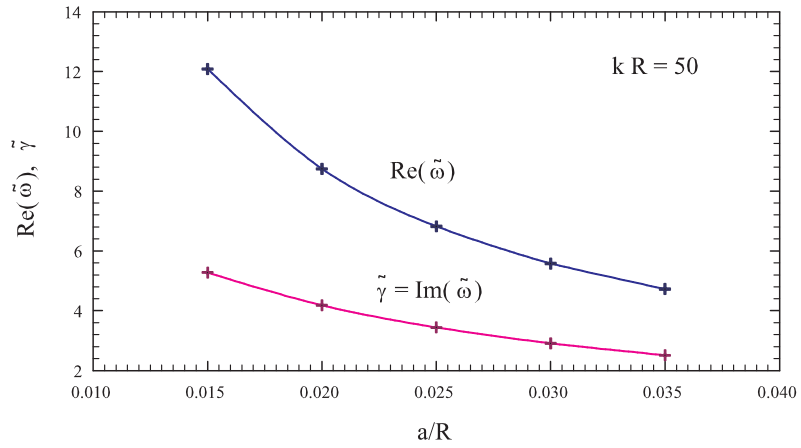


Рис. 4: Зависимости частоты и инкремента неустойчивости от толщины токового слоя.

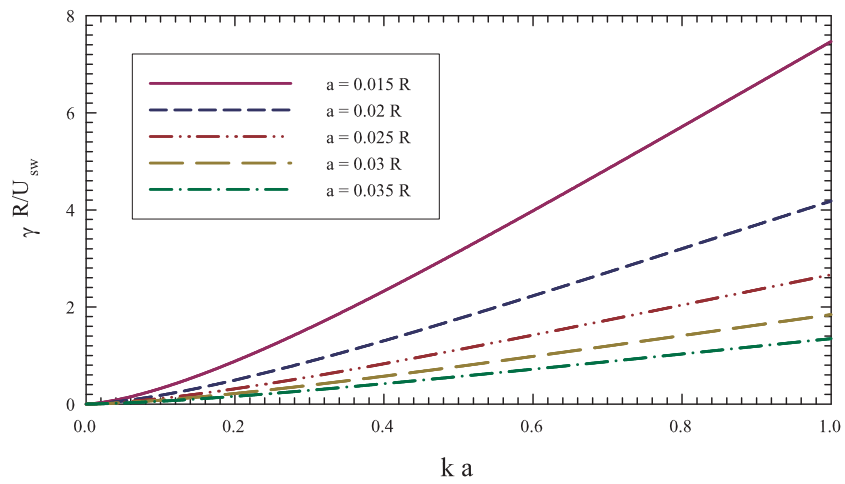


Рис. 5: Зависимость инкремента неустойчивости от параметра ka для различных значений толщины токового слоя.

Список литературы

- [1] Biernat, H. K., N. V. Erkaev, and C. J. Farrugia, MHD effects in the Venus magnetosheath including mass loading, *Adv. Space Res.*, 28, 833-839, 2001.
- [2] Yoon, P. H., J. F. Drake, and A. T. Y. Lui, Theory and simulation of Kelvin-Helmholtz instability in the geomagnetic tail, *JGR*, 101, A12, 27327-27339, 1996.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. - М: Наука, 1982.
- [4] Arshukova, I. L., N. V. Erkaev, H. K. Biernat, and D. F. Vogl, Interchange instability of the Venusian ionopause, *Adv. Space Res.*, 33, 182-186, 2004.
- [5] Elphic, R. C., A. I. Ershkovich, On the stability of the ionopause of Venus, *JGR*, 89, A2, 997-1002, 1984.
- [6] Arshukova, I. L., N. V. Erkaev, and H. K. Biernat, Magnetohydrodynamic instability of a high magnetic shear layer with a finite curvature radius, *Physics of Plasmas*, 9, N. 2, 401-408, 2002.