О численном исследовании асимптотической устойчивости решений линейной системы с периодическими коэффициентами

Клевцова Ю.Ю.

В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными по Липшицу T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) = A(t), \quad \|A(t) - A(s)\| \leq M|t-s| \tag{2}$$

(здесь и везде в дальнейшем $\|\cdot\|$ — спектральная норма). Целью работы является описание вычислительного алгоритма для исследования асимптотической устойчивости решений системы (1).

Напомним, что нулевое решение системы (1) с периодическими коэффициентами асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы монодромии лежат в единичном круге $\gamma = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ (см., например, [1, 2]). Однако, хорошо известно, что нахождение собственных значений неэрмитовых матриц на ЭВМ — плохо обусловленная задача (см., например, [3, 4]). Поэтому при решении конкретных задач зачастую необходимо использовать другие критерии. В частном случае, когда $A(t) = A$ — постоянная матрица, известен критерий Ляпунова асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1), формулируемый в терминах разрешимости матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -C$, $C = C^* > 0$. Использование этого критерия позволяет получить более эффективные алгоритмы численного исследования асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [5, 6]. В настоящей работе предлагается некоторый алгоритм для изучения асимптотической устойчивости решений системы с периодическими коэффициентами (1), который является аналогом алгоритма, разработанного для случая постоянных коэффициентов [5, 6]. Предложенный алгоритм основан на использовании следующего критерия асимптотической устойчиовсти решений системы (1) из работы [7].

Теорема 1. *1. Если все собственные значения матрицы монодромии системы (1) лежат в γ, то для любой матрицы C существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T), \end{cases} \tag{3}$$

при этом, если $C = C^* > 0$, то $H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0,T]$.

2. Если при $C = C^* > 0$ краевая задача (3) имеет эрмитово решение $H(t)$ такое, что $H(0) > 0$, то все собственные значения матрицы монодромии системы (1) лежат в γ.

В [7] было показано: если нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, то решением краевой задачи (3) является интеграл

$$H(t) = \int\limits_0^\infty (Y^{-1}(t))^* Y^*(\xi + t) C Y(\xi + t) Y^{-1}(t) d\xi, \tag{4}$$

где $Y(t)$ — матрицант системы (1). В силу T-периодичности матрицы $A(t)$ этот интеграл можно рассматривать как T-периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова:

$$\frac{d}{dt} H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \quad t \geq 0.$$

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать $C = I$, где I — единичная матрица.

Из формулы (4) и теоремы 1, в частности, следует, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда сходится интеграл $H(0) = \int\limits_0^\infty Y^*(\xi) Y(\xi) d\xi$. Легко показать, что в случае $\|H(0)\| < \infty$ сходятся все интегралы из формулы (4).

Рассмотрим еще одну теорему из работы [7].

Теорема 2. *Пусть все собственные значения матрицы монодромии $Y(T)$ системы (1) лежат в γ. Рассмотрим матрицу $H(t)$, определенную в формуле (4). Имеют место оценки*

$$\|Y^*(t) H(t) Y(t)\| \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right) \|H(0)\|,$$

$$\|Y(t)\|^2 \leq 2a \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right) \|H(0)\| \tag{5}$$

при $t \geq 0$, где

$$a = \max_{t \in [0,T]} \|A(t)\|.$$

Заметим, что утверждения теорем 1, 2 и формула (4) остаются в силе и для случая, когда $A(t)$ — кусочно-постоянная T-периодическая матрица. Из оценки (5) в силу T-периодичности $H(t)$ нетрудно получить, что

$$\|Y(t)\|^2 \leq 2a \exp\left(-p \int\limits_0^T \frac{1}{\|H(t)\|} dt \right) \|H(0)\|, \quad t \in [pT, (p+1)T],\ p = 0, 1, 2 \ldots.$$

Отсюда вытекает, что величина $\|H(0)\|$ отвечает за поведение решения $y(t)$ при малых t, а величина $\int\limits_0^T \frac{1}{\|H(t)\|} dt$ при больших t. В настоящей работе предложен алгоритм приближенного вычисления решения краевой задачи (3).

Автор выражает благодарность профессору Демиденко Г. В. за постановку задач и помощь в работе.

§1. Алгоритм приближенного вычисления интеграла $H(t)$

Пусть все собственные значения матрицы монодромии системы (1) лежат в γ. Тогда по теореме 1 существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи (3). Разобьем отрезок $[0, T]$ на m равных частей: $t_l = l\frac{T}{m} = l\tau$, $l = 0, 1, \dots, m$. Будем строить приближения к интегралу $H(t_l)$, где l — произвольное целое число от 0 до $m-1$. Хорошо известно, что в общем случае формулы для матрицанта системы (1) не существует, поэтому целесообразно вначале каким - то образом приблизить матрицант $Y(t)$ системы (1). Для этого рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy}{dt} = A_\tau(t)y,\, t \geq 0, \tag{6}$$

где $A_\tau(t)$ — кусочно-постоянная матрица:

$$A_\tau(t) = A(t_j + \frac{1}{2}\tau) = A_j \quad \text{при} \quad t_j \leq t \leq t_{j+1},\, j = 0, 1, \dots, m-1,$$

$A_\tau(t)$ продолжается на всю полуось $t \geq 0$ периодически. Очевидно, что $Y_\tau(t) \to Y(t)$ при $\tau \to 0$, где $Y_\tau(t)$ — матрицант системы (6). Для $Y_\tau(t)$ нетрудно получить явную формулу:

$$Y_\tau(t) = e^{(t-t_j)A_j} e^{\tau A_{j-1}} \dots e^{\tau A_0} \tag{7}$$

при $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots m-1$ и

$$Y_\tau(s + qT) = Y_\tau(s) Y_\tau^q(T) \tag{8}$$

для любого $0 \leq s < T$ и натурального q (см., например, [8]). Поскольку собственные значения матрицы монодромии для системы (6) также стремятся к собственным значениям матрицы монодромии для системы (1) при $\tau \to 0$, то, начиная с некоторого τ_0, все собственные значения матрицы монодромии для системы (6) будут также находиться внутри γ, что означает по теореме 1 сходимость интеграла

$$H_\tau(t) = \int\limits_0^\infty (Y_\tau^{-1}(t))^* Y_\tau^*(\xi + t) Y_\tau(\xi + t) Y_\tau^{-1}(t) d\xi, \tag{9}$$

являющегося решением краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}H_\tau + H_\tau A_\tau(t) + A_\tau^*(t) H_\tau = -I, \quad 0 < t < T, \\ H_\tau(0) = H_\tau(T). \end{array} \right. \tag{10}$$

Можно показать, что при $\tau \to 0$

$$H_\tau(t) \rightrightarrows H(t),\, t \in [0, T].$$

Поэтому в качестве приближенного значения интеграла $H(t)$ можно рассмотреть интеграл $H_\tau(t)$ при достаточно малых $\tau > 0$. Из следующей теоремы, полученной в работе [7], вытекает оценка для нормы разности $\|H_\tau(t) - H(t)\|$, $\tau > 0$.

Теорема 3. *Пусть краевая задача (3) имеет единственное эрмитово положительно определенное решение $H(t)$ и $A_1(t)$ — непрерывная матрица такая, что*

$$\Delta = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\| < 1. \tag{11}$$

Тогда краевая задача

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}V + V(A(t)+A_1(t)) + (A(t)+A_1(t))^*V = -I, \quad 0 < t < T, \\ V(0) = V(T), \end{cases}$$

имеет единственное положительно определенное решение, и выполнена оценка

$$\|H(t) - V(t)\| \le \frac{\Delta}{1-\Delta}\|H(t)\|.$$

Из доказательства, приведенного в [7], легко получить справедливость этой теоремы для случая кусочно-непрерывных матриц. Рассмотрим $A_1(t) = A_\tau(t) - A(t)$. Из определения матрицы $A_\tau(t)$:

$$\max_{0\le t\le T} \|A_\tau(t) - A(t)\| = \max_{j=0,1,\dots,m-1} \|A(t_j + \frac{1}{2}\tau) - A(t)\|$$

$$\le M \max_{j=0,1,\dots,m-1} |t_j + \frac{1}{2}\tau - t| \le \frac{M\tau}{2},$$

поскольку для матрицы $A(t)$ выполнено условие Липшица (2). Определим $\tau_0 = \frac{1}{Mh}$, где

$$h = \max_{t\in[0,\,T]} \|H(t)\|,$$

тогда, очевидно, при любом $\tau \in (0, \tau_0)$ неравенство (11) будет выполнено. Отсюда по теореме 3 получаем, что существует единственное решение краевой задачи (10) и

$$\|H(t) - H_\tau(t)\| \le \frac{M\tau h}{1 - M\tau h}\|H(t)\|. \tag{12}$$

Приближенное вычисление интеграла $H_\tau(t_l)$ проведем по аналогии с алгоритмом вычисления матричного интеграла Ляпунова, описанного в монографии Годунова С. К. [5]. В качестве приближений к интегралу $H_\tau(t_l)$ рассмотрим матрицы

$$H_k^\tau(t_l) = \int\limits_0^{2^kT} (Y_\tau^{-1}(t_l))^* Y_\tau^*(\xi + t_l) Y_\tau(\xi + t_l) Y_\tau^{-1}(t_l) d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Вычислять $H_k^\tau(t_l)$ можно по следующим простым формулам:

$$H_k^\tau(t_l) = H_{k-1}^\tau(t_l) + B_{k-1}^*(t_l) H_{k-1}^\tau(t_l) B_{k-1}(t_l), \tag{13}$$

где

$$B_k(t_l) = B_{k-1}^2(t_l), \quad B_0(t_l) = Y_\tau(t_l) Y_\tau(T) Y_\tau^{-1}(t_l).$$

В самом деле, из последней формулы следует, что

$$B_k(t_l) = \left(Y_\tau(t_l)Y_\tau(T)Y_\tau^{-1}(t_l)\right)^{2^{k-1}}.$$

С другой стороны, имеем

$$H_k^\tau(t_l) = H_{k-1}^\tau(t_l) + \int\limits_{2^{k-1}T}^{2^kT} (Y_\tau^{-1}(t_l))^* Y_\tau^*(\xi + t_l)Y_\tau(\xi + t_l)Y_\tau^{-1}(t_l)d\xi.$$

Отсюда по свойству (8) матриканта $Y_\tau(t)$ легко получить (13).

Следующая теорема указывает скорость сходимости приближений $H_k^\tau(t_l)$ к интегралу $H_\tau(t_l)$.

Теорема 4. *Пусть все собственные значения матрицы монодромии системы (1) лежат в* γ *и* $M\tau h < 1$. *Тогда*

$$\|H_\tau(t) - H_k^\tau(t)\| \leq \|H_\tau(t)\| \exp\left(-2^k \int\limits_0^T \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}ds\right), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку $M\tau h < 1$, то по теоремам 1 и 3 все собственные значения матрицы монодромии $Y_\tau(T)$ системы (6) лежат в γ. Продолжим $H_\tau(t)$ на всю полуось $t \geq 0$ периодическим образом. Тогда при $t \geq 0$ по теореме 2 выполнена оценка

$$\|Y_\tau(t)\|^2 \leq 2a \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}ds\right) \|H_\tau(0)\|, \tag{15}$$

где $a = \max\limits_{t\in[0,T]} \|A(t)\|$.

Рассмотрим следующую систему при $0 \leq t \leq T$

$$\frac{d}{ds}z(s) = A_\tau(t + s)z(s),\ s \geq 0. \tag{16}$$

Очевидно, матрица $A_\tau(t+s)$ является T - периодической по s. Пусть $Z_\tau(s)$ — матрицант системы (16), т. е. $Z_\tau(s)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}Z_\tau(s) = A_\tau(t + s)Z_\tau(s), \\ Z_\tau(0) = I. \end{cases}$$

Очевидно, имеем

$$Z_\tau(s) = Y_\tau(t + s)Y_\tau^{-1}(t). \tag{17}$$

Докажем, что спектр матрицы $Z_\tau(T)$ лежит в γ. В силу (15)

$$\|Z_\tau^n(T)\|^2 \leq \|Y_\tau(t)\|^2\|Y_\tau^{-1}(t)\|^2 2a \exp\left(-n\int\limits_0^T \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}ds\right) \|H_\tau(0)\|.$$

Поскольку модуль произвольного собственного значения матрицы не превосходит ее нормы, то

$$|\lambda(Z_\tau(T))|^{2n} \le \|Y_\tau(t)\|^2 \|Y_\tau^{-1}(t)\|^2 2a \exp\left(-n\int\limits_0^T \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}ds\right)\|H_\tau(0)\|,$$

где $\lambda(Z_\tau(T))$ — произвольное собственное значение матрицы $Z_\tau(T)$. Тогда

$$|\lambda(Z_\tau(T))|^{2n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $|\lambda(Z_\tau(T))| < 1$, т. е. спектр матрицы $Z_\tau(T)$ лежит в γ.

По теореме 1 существует единственное решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\widetilde{H}_\tau + \widetilde{H}_\tau A_\tau(t+s) + A_\tau^*(t+s)\widetilde{H}_\tau = -I, \quad 0 < s < T, \\ \widetilde{H}_\tau(0) = \widetilde{H}_\tau(T). \end{cases}$$

Это решение имеет вид

$$\widetilde{H}_\tau(s) = \int\limits_0^\infty (Z_\tau^{-1}(s))^* Z_\tau^*(\xi+s) Z_\tau(\xi+s) Z_\tau^{-1}(s) d\xi.$$

Очевидно, этот интеграл является T-периодическим решением уравнения

$$\frac{d}{ds}\widetilde{H}_\tau + \widetilde{H}_\tau A_\tau(t+s) + A_\tau^*(t+s)\widetilde{H}_\tau = -I$$

при $s \ge 0$. Из (17) имеем:

$$\widetilde{H}_\tau(s) = H_\tau(t+s). \tag{18}$$

По теореме 2 при $s \ge 0$ получим

$$\|Z_\tau^*(s)\widetilde{H}_\tau(s)Z_\tau(s)\| \le \|\widetilde{H}_\tau(0)\| \exp\left(-\int\limits_0^s \frac{1}{\|\widetilde{H}_\tau(r)\|}dr\right).$$

Возьмем $s = 2^k T$, воспользуемся равенствами (17) и (18):

$$\|(Y_\tau(t+2^kT)Y_\tau^{-1}(t))^* H_\tau(t+2^kT) Y_\tau(t+2^kT) Y_\tau^{-1}(t)\|$$

$$\le \|H_\tau(t)\| \exp\left(-\int\limits_0^{2^kT} \frac{1}{\|H_\tau(t+r)\|}dr\right).$$

Напомним, что $Y_\tau(t+2^kT) = Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)$ и матрица $H_\tau(t)$ является T-периодической. Тогда

$$\|\left(Y_\tau(t)Y_\tau^{2^k}(T)Y_\tau^{-1}(t)\right)^* H_\tau(t) Y_\tau(t) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t)\|$$

$$\le \|H_\tau(t)\| \exp\left(-2^k \int\limits_0^T \frac{1}{\|H_\tau(s)\|}ds\right).$$

Поскольку

$$\|H_\tau(t) - H_k^\tau(t)\| = \| \left(Y_\tau(t) Y^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t)\right)^* H_\tau(t) Y_\tau(t) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t)\|,$$

то оценка (14) доказана.

Теорема доказана.

Из формулы (14) вытекает, что при нахождении интегралов $H_k^\tau(t_l)$ нужно вычислять матрицы $B_k(t_l)$ и $H_0^\tau(t_l)$. При нахождении матриц $B_k(t_l)$ не возникает особых трудностей, поскольку

$$B_0(t_l) = Y_\tau(t_l) Y_\tau(T) Y_\tau^{-1}(t_l),$$

где

$$Y_\tau(t) = e^{(t-t_j)A_j} e^{\tau A_{j-1}} \dots e^{\tau A_0}$$

при $t_j \le t \le t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots m-1$ и

$$B_k(t_l) = B_{k-1}^2(t_l).$$

Алгоритм вычисления начального приближения матрицы $H_0^\tau(t_l)$ описан в следующем параграфе.

§2. Приближенное вычисление интеграла $H_0^\tau(t_l)$

В качестве приближения к $H_\tau^0(0)$ рассмотрим сумму

$$\widehat{H}_\tau^0(0) = \sum_{n=0}^{m-1} Y_\tau^*(t_n) Y_\tau(t_n) \tau. \tag{19}$$

Введем обозначение для $l = 1, 2, \dots, m-1$

$$\widehat{H}_\tau^0(t_l) = \sum_{n=0}^{m-1} \left(Y_\tau^{-1}(t_l)\right)^* Y_\tau^*(t_{n+l}) Y_\tau(t_{n+l}) Y_\tau^{-1}(t_l) \tau. \tag{20}$$

Получим оценку скорости сходимости приближений $\widehat{H}_\tau^0(t_l)$ к интегралу $H_\tau^0(t_l)$.

Теорема 6. *Пусть матричная последовательность* $\{S_j\}$ *такая, что ряды* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} S_j^* (\widehat{H}_0^\tau(t_l) - H_0^\tau(t_l)) S_j$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} S_j^* H_0^\tau(t_l) S_j$ *сходятся. Если* τ *такое, что*

$$\Delta = \frac{e^{2a\tau} - 2a\tau - 1}{2a} < 1, \tag{21}$$

то

$$\| \sum_{j=0}^{\infty} S_j^* (\widehat{H}_\tau^0(t_l) - H_\tau^0(t_l)) S_j \| \le \frac{\Delta}{1-\Delta} \| \sum_{j=0}^{\infty} S_j^* H_\tau^0(t_l) S_j \|. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $l = 0$. Для l больше 0 доказательство аналогично. В силу (7)

$$\int\limits_0^T Y_\tau^*(\xi) Y_\tau(\xi) d\xi - \sum_{n=0}^{m-1} Y_\tau^*(t_n) Y_\tau(t_n) \tau = \sum_{n=0}^{m-1} Y_\tau^*(t_n) \left(\int\limits_0^\tau e^{sA_n^*} e^{sA_n} ds - \tau I \right) Y_\tau(t_n).$$

Пусть j — произвольное целое неотрицательное число. Поэтому для любого вектора v выполняется неравенство

$$\left|\left\langle \left(S_j^*(\widehat{H}_\tau^0(0) - H_\tau^0(0))S_j\right) v, v\right\rangle\right| \le \sum_{n=0}^{m-1} \left\| \int\limits_0^\tau e^{sA_n^*} e^{sA_n} ds - \tau I \right\| |Y_\tau(t_n) S_j v|^2 \, \tau.$$

Оценим величину

$$\left\| \int\limits_0^\tau e^{sA_n^*} e^{sA_n} ds - \tau I \right\|, \quad n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Так как для любого вектора u верна оценка

$$\left\langle \left(\int\limits_0^\tau e^{sA_n^*} e^{sA_n} ds - \tau I \right) u, u \right\rangle = \int\limits_0^\tau \left(|e^{sA_n} u|^2 - |u|^2 \right) ds \le \int\limits_0^\tau \left(e^{2as} - 1 \right) ds |u|^2 = \Delta |u|^2.$$

Следовательно,

$$\| \int\limits_0^\tau e^{sA_n^*} e^{sA_n} ds - \tau I \| \le \Delta |u|^2.$$

Поэтому

$$\left|\left\langle \left(S_j^*(\widehat{H}_\tau^0(0) - H_\tau^0(0))S_j\right) v, v\right\rangle\right| \le \Delta \left\langle \left(S_j^* \widehat{H}_\tau^0(0) S_j\right) v, v \right\rangle, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда

$$\left| \left\langle \left(\sum_{j=0}^\infty S_j^*(\widehat{H}_\tau^0(0) - H_\tau^0(0))S_j \right) v, v \right\rangle \right|$$

$$\le \sum_{j=0}^\infty \left|\left\langle \left(S_j^*(\widehat{H}_\tau^0(0) - H_\tau^0(0))S_j\right) v, v\right\rangle\right| \le \Delta \left\langle \left(\sum_{j=0}^\infty S_j^* \widehat{H}_\tau^0(0) S_j \right) v, v \right\rangle.$$

Отсюда из неравенства $\Delta < 1$ следует оценка (22).

Теорема доказана.

§3. Оценка скорости сходимости приближений $\widehat{H}_k^\tau(t_l)$ к интегралу $H(t_l)$

Пусть приближениями к исходному интегралу $H(t_l)$ будут интегралы $\widehat{H}_k^\tau(t_l)$, которые получаются по формуле (13), если в качестве нулевого приближения взять интегралы $\widehat{H}_0^\tau(t_l)$. Этот параграф посвящен получению оценки скорости сходимости приближений $\widehat{H}_k^\tau(t_l)$ к интегралу $H(t_l)$. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть все собственные значения матрицы монодромии системы (1) лежат в γ и τ удовлетворяет неравенству (21) и $M\tau h < 1$, где M — константа Липшица из неравенства (2), $h = \max\limits_{t\in[0,T]} \|H(t)\|$. Тогда выполнена оценка*

$$\|H(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| \le \left[M\tau h + \frac{1}{1-\Delta} \exp\left(-2^k (1 - M\tau h) \int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right) + \frac{\Delta}{1-\Delta} \right]$$

$$\times \frac{1}{1 - M\tau h} \|H(t_l)\|, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{23}$$

k — целое неотрицательное число, i — натуральное число, $a = \max\limits_{t \in [0,T]} \|A(t)\|$.

Доказательство. Пусть l — произвольное целое число от 0 до $m-1$. Поскольку в силу (12)

$$\|H(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| \leq \frac{M\tau h}{1 - M\tau h} \|H(t_l)\| + \|H_\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\|, \tag{24}$$

то осталось оценить $\|H_\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\|$. Из формулы (13) следует, что

$$\widehat{H}_k^\tau(t_l) = \sum_{j=0}^{2^k - 1} \left(Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \right)^* \widehat{H}_0^\tau(t_l) Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l). \tag{25}$$

Обозначим через $\overline{H}^\tau(t_l)$ сумму ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \right)^* \widehat{H}_0^\tau(t_l) Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l). \tag{26}$$

Тогда

$$\|H_\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| \leq \|\overline{H}^\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| + \|H_\tau(t_l) - \overline{H}^\tau(t_l)\|. \tag{27}$$

Оценим первое слагаемое в (27). Из (9) легко получить, что

$$H_\tau(t_l) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \right)^* H_0^\tau(t_l) Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l). \tag{28}$$

Тогда, полагая в теореме 5 $S_j = Y_\tau(t_l) Y_\tau^{2^k + j}(T) Y_\tau^{-1}(t_l)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, в силу (25) имеем

$$\|\overline{H}^\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| \leq \frac{1}{1 - \Delta} \| \left(Y_\tau(t_l) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \right)^* H_\tau(t_l) Y_\tau(t_l) Y_\tau^{2^k}(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \|$$

(учитывая теорему 4 и оценку (12))

$$\leq \frac{1}{1 - \Delta} \frac{1}{1 - M\tau h} \|H(t_l)\| \exp\left(-2^k (1 - M\tau h) \int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right).$$

Следовательно,

$$\|\overline{H}^\tau(t_l) - \widehat{H}_k^\tau(t_l)\| \leq \frac{1}{1 - \Delta} \frac{1}{1 - M\tau h} \|H(t_l)\|$$

$$\times \exp\left(-2^k (1 - M\tau h) \int\limits_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right). \tag{29}$$

Оценим теперь второе слагаемое в (27). В силу (26), (28)

$$\|H_\tau(t_l) - \overline{H}^\tau(t_l)\| \leq \| \left(H_0^\tau(t_l)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(H_0^\tau(t_l) - H_0^\tau(t_l)\right) \left(H_0^\tau(t_l)\right)^{-\frac{1}{2}} \|$$

$$\times \| \sum_{j=0}^{\infty} \left(Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \right)^* H_0^\tau(t_l) Y_\tau(t_l) Y_\tau^j(T) Y_\tau^{-1}(t_l) \|.$$

Из (21) имеем

$$\|H_\tau(t_l) - \overline{H}^\tau(t_l)\| \leq \frac{\Delta}{1-\Delta} \|H_\tau(t_l)\|.$$

В силу (12)

$$\|H_\tau(t_l) - \overline{H}^\tau(t_l)\| \leq \frac{\Delta}{1-\Delta} \|H(t_l)\|. \tag{30}$$

Из (27), (29) и (30) получаем оценку

$$\|H_\tau(t_l) - \overline{H}^\tau(t_l)\| \leq \left[\frac{1}{1-\Delta} \exp\left(-2^k (1 - M\tau h) \int_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds \right) + \frac{\Delta}{1-\Delta} \right]$$

$$\times \frac{1}{1 - M\tau h} \|H(t_l)\|.$$

Тогда в силу (24) оценка (23) доказана.

Теорема доказана.

Литература

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

[2] Якубович В. А., Старжинский В. М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* М.: Наука, 1972.

[3] Уилксон Дж. *Алгебраическая проблема собственных значений.* М.: Наука, 1970.

[4] Годунов С. К. *Лекции по современным аспектам линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 2002.

[5] Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.* Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. Т. 1: Краевые задачи.

[6] Булгаков А. Я. *Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, №3. С. 32–41.

[7] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

[8] Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.