

ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ И ОБРАБОТКЕ ЗРИТЕЛЬНЫХ ОБРАЗОВ

О.В. Самарина, В.В. Славский

Аннотация. При исследовании цифровых многоканальных изображений (снимков) возникает задача определения характеристик изображения, инвариантных относительно некоторой группы преобразований [1,2,3]. Характеристики изображения такого рода могут быть использованы в таких задачах обработки изображений как: задача распознавания, отыскания снимка по образцу, задача фотограмметрии, и. т. д. В данной работе проведено исследование группы проективных преобразований изображения, т.е. преобразований, возникающих в результате различного положения фотокамеры и различной калибровки каналов в момент съемки. В ходе данных исследований определена новая характеристика изображения - инвариант относительно группы проективных преобразований и калибровки каналов. Данный инвариант является эффективной характеристикой изображения и его можно использовать в самых различных прикладных задачах обработки изображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим трехканальное изображение. В математической постановке это означает, что заданы три неотрицательные функции в некоторой области на плоскости. В данном пункте будем предполагать, что функции 1-раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо разложение Тейлора 1-го порядка с центром в произвольной точке области. Можно считать, не ограничивая общности, что данная точка – начало координат на плоскости:

$$\begin{aligned}f^1(x, y) &= a^1 + p_1^1 x + p_2^1 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\f^2(x, y) &= a^2 + p_1^2 x + p_2^2 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\f^3(x, y) &= a^3 + p_1^3 x + p_2^3 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).\end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{f}(x, y) = [f^1(x, y), f^2(x, y), f^3(x, y)]$, имеем:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(0, 0), \quad \mathbf{p}_1 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(0, 0), \quad \mathbf{p}_2 = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(0, 0).$$

Наиболее естественной группой преобразований снимков является группа проективных преобразований. Общее проективное преобразование плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \\y^* &= \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}\end{aligned}$$

Рассмотрим подгруппу проективных преобразований с неподвижной точкой в начале координат:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{c_{11}x + c_{12}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \\y^* &= \frac{c_{21}x + c_{22}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что эта подгруппа имеет размерность 5.

Предположим, что снимок подвергся проективному преобразованию и калибровке каналов:

$$(1) \quad \Theta(\lambda, x^*, y^*) : \mathbf{f}(x, y) \rightarrow e^{\lambda \mathbf{f}} \left(\left(\frac{c_{11}x + c_{12}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \right), \left(\frac{c_{21}x + c_{22}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \right) \right).$$

Здесь коэффициенты e^{λ_1} , e^{λ_2} , e^{λ_3} соответствуют калибровке 1, 2 и 3 слоев; множители e^{λ_i} можно интерпретировать как факторы поглощения среды, действующие в окрестности исследуемой точки и соответствующие частотному диапазону данного слоя. Пусть $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ – соответствующий вектор.

Нетрудно видеть, что преобразования $\Theta(\lambda, x^*, y^*)$ образуют восьмимерную коммутативную группу Ли G .

Рассматривая действие группы G на пространстве $J_3^k = J^k(R^2, R^3)$ k -струй функций (тейлоровских разложений k -го порядка) получим, что группа G действует в пространстве размерности $n(k, 3) = \frac{3(k+1)(k+2)}{2}$. Здесь k – порядок тейлоровского разложения, а 3 – число каналов. В нашем случае $k = 1$, а $\dim J_3^1 = 9$.

Определение 1. Будем называть числовую функцию $I : J_3^k \rightarrow R$ нетождественно равную константе инвариантом k -го порядка, если под действием преобразований группы G она не меняется.

Замечание. В нашем случае размерность пространства инвариантов равна $\dim(I) = \dim(J_3^k) - \dim(G) = 1$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Следующая функция является инвариантом:*

$$(2) \quad I = \frac{a^1 (p_2^2 p_1^3 - p_1^2 p_2^3)}{a^2 (p_1^1 p_2^3 - p_2^1 p_1^3)}.$$

Данный инвариант представим в виде:

$$I = \frac{-a^1 \begin{vmatrix} p_1^2 & p_2^2 \\ p_1^3 & p_2^3 \end{vmatrix}}{a^2 \begin{vmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^3 & p_2^3 \end{vmatrix}}.$$

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

В силу инвариантности относительно калибровки каналов, группы аффинных преобразований при вычислении инварианта можно перейти к "нормированным" функциям $f^1(x, y)$, $f^2(x, y)$, $f^3(x, y)$ имеющим вид:

$$(3) \quad \begin{aligned} f^1(x, y) &= 1 + p_1^1 x + p_2^1 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ f^2(x, y) &= 1 + p_1^2 x + p_2^2 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \\ f^3(x, y) &= 1 + p_1^3 x + p_2^3 y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \end{aligned}$$

где $p_1^1 = 1$, $p_1^2 = 0$ и $p_2^1 = 0$, $p_2^2 = 1$.

Геометрический смысл векторов $p^1 = (p_1^1, p_2^1)$, $p^2 = (p_1^2, p_2^2)$, $p^3 = (p_1^3, p_2^3)$ заключается в том, что они представляют собой градиенты нормированных функций $f^1(x, y)$, $f^2(x, y)$, $f^3(x, y)$.

Геометрический смысл инварианта в этой ситуации

$$I = \frac{-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p_1^3 & p_2^3 \end{vmatrix}}{1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p_1^3 & p_2^3 \end{vmatrix}} = \frac{p_1^3}{p_2^3}$$

Отметим, что данные вычисления справедливы в том случае когда две функции из f^1, f^2, f^3 в данной точке имеют регулярные значения. В общем положении, это справедливо для каждой точки.

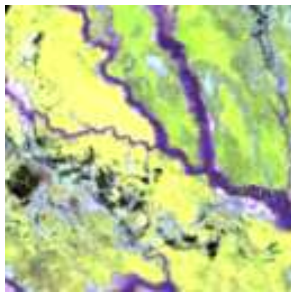


Рис. 1. Изображение kosmos1

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Исследуем данный инвариант на примере конкретного изображения (см. рис. 1).

На рисунке (2) изображено значение арктангенса $\arctan(I)$ от инварианта данного изображения

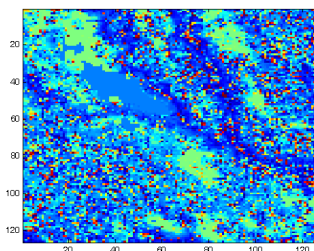


Рис. 2. $\arctan(I)$

Пусть kosmos2 – растяжение, а kosmos3 – сжатие исходного изображения kosmos1 (рис. 3). Гистограммы распределения инвариантов для изображений kosmos1, kosmos2, kosmos3

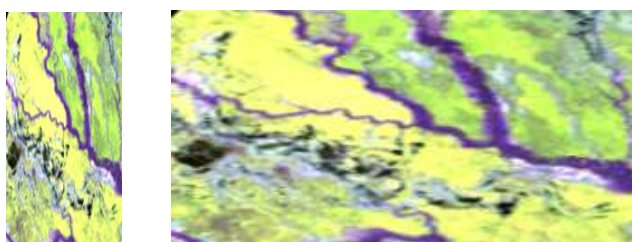


Рис. 3. Изображения kosmos2, kosmos3

представлены на рисунке 4. Заметно очевидное сходство гистограмм распределения инвариантов изображений.

Пусть kosmos4 – изображение, полученное путем поворота на 45 градусов и растяжения в 1.5 раза снимка kosmos1.

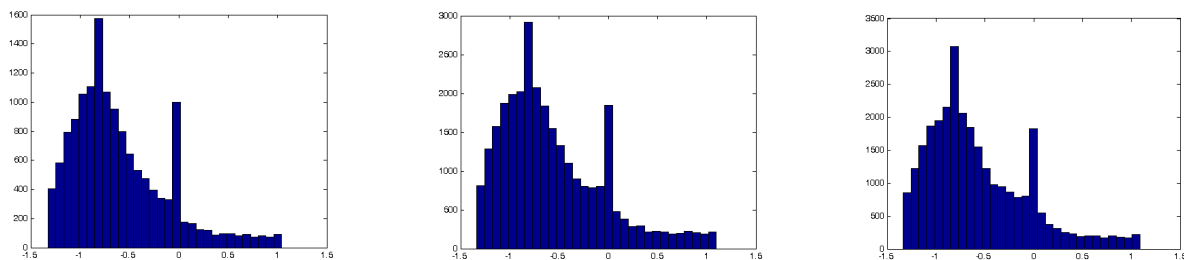


Рис. 4. Гистограмма распределения значений инвариантов для изображений kosmos1, kosmos2, kosmos3

Для изображений kosmos1 и kosmos4 инварианты будем вычислять в круге, центр которого совпадает с центром изображения.

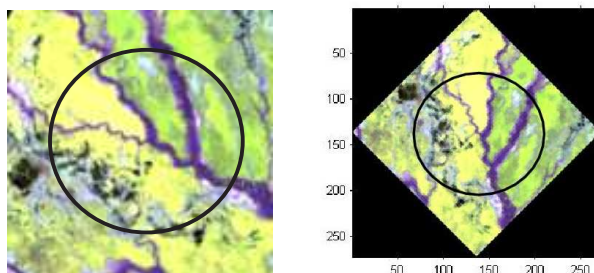


Рис. 5. Области вычисления инвариантов для первоначального и преобразованного изображений соответственно

Гистограммы распределения инвариантов в рассматриваемых областях имеют вид:

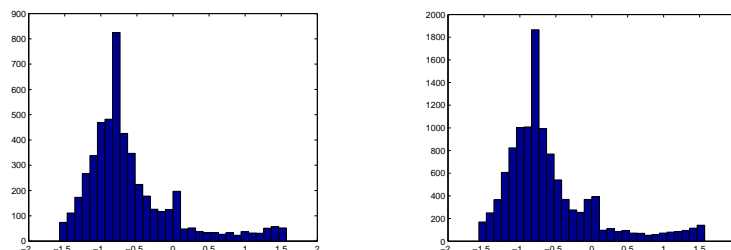


Рис. 6. Гистограммы распределения инвариантов для первоначального и преобразованного изображений соответственно

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что рассмотренный в данной статье инвариант относительно группы проективных преобразований и калибровки каналов является эффективной характеристикой изображения и его можно использовать в различных прикладных задачах обработки изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Peter J. Olver*. Equivalence, Invariants, and Symmetry. / Cambridge University Press. 1995.
- [2] *Qin L., Zeng W., Gao W.* Local invariant descriptor for image matching. / ICASSP, 2005.
- [3] *Со́йфер В.А.* Методы компьютерной обработки изображений (2-е изд.) /Физматлит, 2003.