Теоретико-категорные исследования временных систем переходов с независимостью

Дубцов Р.С.

dubtsov@iis.nsk.su

Институт Систем Информатики им. А.П. Ершова СО РАН,

Россия, Новосибирск, 630090, пр-т ак. Лаврентьева 6

Введение

В теории параллелизма известно большое разнообразие моделей параллелизма. Чтобы унифицировать и классифицировать их, последнеие десятилетия стали активно применяться методы теории категорий [11]. Основная идея данного подхода заключается в следующем. Объекты категорий представляют процессы, а морфизмы соответствуют взаимосвязям между поведениями процессов. Чаще всего, взаимосвязи устанавливаются в виде пары сопряженных функторов или корефлексии (особого вида сопряжения в котором единица является изоморфизмом).

Системы переходов — широко используемая и хорошо изученная модель вычислений [10, 17]. Данная модель является основой операционной семантики исчисления коммуницирующих систем Милнера (CCS), а так же лежит в основе других подходов, таких как исчисление коммуницирующих последовательных процессов Хоара (CSP). Неформально говоря, система переходов — это множество состояний, между которыми заданны переходы. Таким образом, данная модель параллелизма является интерливинговой, то есть не позволяют различить параллелизм и недетерминизм. Хотя во многих случаях такой уровень абстракции достаточен, для некоторых видов анализа требуется различать эти понятия. Это послужило мотиваций для разработки расширений систем переходов с независимостью, которые позволили бы выразить параллелизм в полной мере [12, 15, 5, 6, 16, 4]. Двумя наиболее популярными расширениями являются системы переходов с независимостьюб введенные Винскелем и Нильсоном [17], и асинхронные системы переходов, введенные независимо Беднарчуком [3] и Шилдсом [14]. Модели используют общий подход: расширить базовую модель некоторым отношением «похожести», которое позволяет определить, представляют ли данные переходы одно и то же действие системы, или нет (и тем самым отличить параллельные переходы от переходов, которые могут недетерминированно выполниться в любом порядке). Неформально говоря, это достигается тем, что срабатывания переходов рассматривается как происхождения некоторых событий, причем переходы представляют одно событие, если они представляют одно и то же действие системы. В асинхронных системах переходов для этого явным образом вводятся события и связанное с ними отношения независимости. В системах переходов с независимостью отношение независимости вводится непосредственно на переходах. Как было показано в [8], системы переходов с независимостью в теоретико-категорном смысле эквивалентны подклассу асинхронных систем переходов. Взаимосвязи систем переходов с независимостью с другими моделями параллелизма в рамках теоретико-категорного подхода подробно исследованы в работах [17, 13], где были установлены их связи с системами переходов, деревьями синхронизации, трассами Хоара и первичными структурами событий (и, следовательно, с областями Скотта).

Особое место среди параллельных систем занимают системы реального времени, поведение которых в значительной степени зависит от количественных временных характеристик. Для систем реального времени важны как модели вычислений, так и модели времени. В литературе такие системы часто представляются временными автоматами [2] и подобными моделями. Однако все эти формализмы базируются на интерливинговой семантике и не позволяют моделировать параллелизм естественным образом (напрямую).

Для систем переходов известно несколько временных расширений. Например, во временных системах переходов, введенных Хензингером, Манна и Пнуэли в [7], время введено в виде интервалов связанных с переходами[1] и устанавливающих минимальный и максимальный моменты локального времени в которые данный переход может выполниться. Нильсен и Хуне в работе [9] добавили к классическим системам переходов некоторый набор временных счетчиков и связали с каждым переходов системы набор линейных ограничений на их значения. Подход, представленный ниже близок к изложенному в [7], однако использует системы переходов с независимостью как базовую модель и глобальное время.

Цель данной работы — построить временные расширения хорошо известной модели параллелизма с семантикой «истинного параллелизма» — систем переходов с независимостью [13], и определить для них семантику помеченных областей. Время моделируется при помощи наборов целочисленных задержек, связанных с каждым переходом. Задержки являются минимальными моментами глобального времени, после которых данный переход может выполниться. При этом i-е выполнение перехода может произойти не раньше, чем момент времени указанный в i-й задержке, и количество срабатываний перехода не может быть больше, чем количество связанных с ним задержек. Само выполнение перехода является мгновенным.

Работа состоит из 5 частей и заключения. В первой части приводятся известные понятия и результаты, связанные с системами переходов с независимостью. В следующей части вводится временное расширение систем

[1] В отличие от классических систем переходов, переходы систем переходов рассматриваемых в [7] задают связи сразу между несколькими состояниями системы и, следовательно, в классических понятиях должны рассматриваться как некоторый класс переходов.

переходов с независимостью и событийных систем переходов с независимостью; строятся соответствующие категории. В третьей части строится развертка временных систем переходов с независимостью в событийные временные системы переходов с независимостью и дается теоретико-категорная характеризация построенной развертки. В четвертой части устанавливается взаимосвязь между событийными временными системами переходов с независимостью и временными первичными структурами событий. В следующей части показывается как полученные ранее результаты могут быть использованы для определения семантики помеченных областей для систем переходов с независимостью. В заключении приводится краткий список полученных результатов.

Теоретико-категорные определения, понятия и результаты, использованные в данной работе, могут быть найдены в [11].

1 Модель систем переходов с независимостью

Системы переходов с независимостью были введены в [13] как промежуточная модель между системами переходов и структурами событий. Эта модель, как и системы переходов, описывает систему в целом, в терминах ее (возможно, повторяющихся) состояний, а с другой стороны является моделью истинного параллелизма. Неформально говоря, временная система переходов с независимостью — это множество состояний и переходы между ними. Между переходами задается отношение независимости, которое явным образом показывает, какие переходы являются параллельными. Перейдем теперь к точному определению.

Определение 1. *Система переходов с независимостью* (СПН) — это набор $TI = (S, S_0, L, Tran, I)$, где

- S — счетное множество *состояний*,
- $s^I \in S$ — *начальное состояние*,
- L — счетное множество *меток*,
- $Tran \subseteq S \times L \times S$ — множество *переходов*,
- $I \subseteq Tran \times Tran$ — иррефлексивное, симметричное *отношение независимости* на переходах,

такие, что если определить отношение $\prec$ как

$$
\begin{aligned}
(s,a,s') \prec (s'',a,u) \quad \Longleftrightarrow \quad & \exists (s,b,s''),(s',b,u) \in Tran\,. \\
& (s,a,s')\ I\ (s,b,s'') \land \\
& (s,a,s')\ I\ (s',b,u) \land \\
& (s,b,s'')\ I\ (s'',a,u),
\end{aligned}
$$

и определить отношение $\sim$ как наименьшее отношение эквивалентности, содержащее отношение $\prec$ (см. рисунок ниже), то верно:

$$\begin{tikzcd} s \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\prec"] & s' \arrow[d, "a"] \\ s'' \arrow[r, "b"'] & u \end{tikzcd}$$

1. $(s, a, s') \sim (s, a, s'') \Rightarrow s = s''$,
2. $(s, a, s')\ I\ (s, b, s'') \Rightarrow \exists (s', b, u), (s'', a, u) \,.\, (s, a, s')\ I\ (s', b, u) \wedge$
   $(s, b, s'')\ I\ (s'', a, u)$,

   то есть если из данного состояния возможны два независимых перехода, то должно быть состояние, в котором они «встретятся» на следующем шаге:

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, "I"] & \\ s' & & s'' \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & s \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, "I"] & \\ s'\ I \arrow[dr, "b"'] & & I\, s'' \arrow[dl, "a"] \\ & u & \end{tikzcd},$$

3. $(s, a, s')\ I\ (s', b, u) \Rightarrow \exists (s, b, s''), (s'', a, u) \,.\, (s, a, s')\ I\ (s, b, s'') \wedge$
   $(s, b, s'')\ I\ (s'', a, u)$,

   то есть если независимые переходы могут произойти в одном порядке, то они могут произойти и в другом:

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dl, "a"'] \\ s'\ I \arrow[dr, "b"'] & \\ & u \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & s \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[d, phantom, "I"] & \\ s'\ I \arrow[dr, "b"'] & & I\, s'' \arrow[dl, "a"] \\ & u & \end{tikzcd},$$

4. $(s, a, s') \sim (s'', a, u)\ I\ (w, b, w') \Rightarrow (s, a, s')\ I\ (w, b, w')$.

Для удобства введем следующее обозначение:

$$\mathrm{Diam}_{a,b}(s, s', s'', u)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists (s, a, s'), (s, b, s''), (s', b, u), (s'', a, u) \in Tran \,.$$
$$(s, a, s')\ I\ (s, b, s'') \wedge (s, a, s')\ I\ (s', b, u) \wedge (s, b, s'')\ I\ (s'', a, u)$$

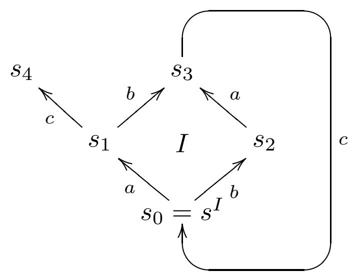
и будем говорить, что данные переходы образуют *ромб независимости*. Класс переходов, $\sim$-эквивалентных переходу t обозначим $[t]$.

Событийная система переходов с независимостью (сСПН) — $OTI = (S, s^I, L, Tran, I)$ — это ацикличная и достижимая (то есть любое состояние достижимо по переходам из начального состояния) СПН такая, что

$$(s', a, u) \neq (s'', b, u) \in Tran \quad \Rightarrow \exists s \,.\quad \mathrm{Diam}_{a,b}(s, s', s'', u).$$

То есть, если в данном состоянии «встречаются» два перехода, то существует состояние, из которого на предыдущем шаге они оба могли произойти независимым образом:

$$\begin{tikzcd}
s' \arrow[dr, "b"'] & & s' \arrow[dl, "a"] \\
& u &
\end{tikzcd}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{tikzcd}
& s \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[dd, phantom, "I"] & \\
s' \arrow[dr, "b"'] & & s'', \arrow[dl, "a"] \\
& u &
\end{tikzcd}$$



TI

Рис. 1:

Пример 1. *Примеры СПН TI и сСПН OTI приведены на рис. 1 и рис. 2 соответственно. Множество состояний TI имеет вид $\{s_0, \ldots, s_4\}$, множество состояний OTI — $\{s'_0, \ldots, s'_9\}$. Переход между состояниями обозначается стрелкой с соответствующей меткой. Буква I внутри ромба означает, что он является ромбом независимости.*

Поведение систем переходов с независимостью описывается в терминах *вычислений*, которые представляют собой последовательности выполнений переходов системы, ведущие из начального состояния.

Определение 2. Последовательность переходов $\pi = t_1, \ldots, t_n$ — *путь*, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ верно: $t_i = (s_{i-1}, a_i, s_i)$. Положим $\mathrm{dom}(\pi) = s_0$ и $\mathrm{cod}(\pi) = s_n$. Пустой путь будем обозначать через ϵ. Пусть $\mathrm{Path}(TI)$ — множество путей СПН TI. Конкатенация путей π и π' таких, что $\mathrm{cod}(\pi) = \mathrm{dom}(\pi')$ определяется естественным образом. Для пути π и перехода t обозначим $\mathcal{N}(\pi, [t]) = |\{t' \in \pi | t' \in [t]\}|$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} & \\
s'_9 & & s'_8 \arrow[u, "c"] & \\
 & s'_6 \arrow[ul, "c"'] \arrow[ur, "b"] & I & s'_7 \arrow[ul, "a"'] \\
 & & s'_5 \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "b"'] & \\
s'_4 & & s'_3 \arrow[u, "c"] & \\
 & s'_1 \arrow[ul, "c"'] \arrow[ur, "b"] & I & s'_2 \arrow[ul, "a"'] \\
 & & s'_0 = {s'}^I \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}
$$

OTI'

Рис. 2:

Путь π такой, что $\mathrm{dom}(\pi) = s^I$ будем называть *вычислением*. Множество вычислений СПН TI будем обозначать $\mathrm{Comp}(TI)$. Переход $t = (s, a, s)$ будем называть *достижимым*, если существует вычисление, содержащее t.

В дальнейшем будем рассматривать только те СПН, в которых все переходы достижимые.

Отношение независимости на переходах позволяет определить отношение эквивалетности $\simeq$ на путях (и вычислениях) объединяющее пути (и вычисления), отличающиеся только порядком срабатывания независимых переходов, в один класс независимости.

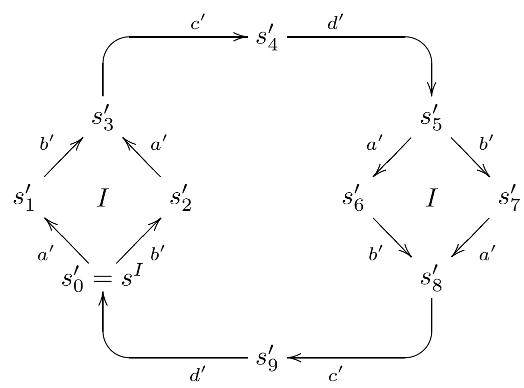
Определение 3. Пусть $\simeq$ — наименьшее отношение эквивалентности на путях, такое, что

$$\pi_s(s, a, s')(s', b, u)\pi_v \simeq \pi_s(s, b, s'')(s'', a, u)\pi_v \iff \mathrm{Diam}_{a,b}(s, s', s'', u)$$

Класс путей, $\simeq$-эквивалентных пути π, будем обозначать $[\pi]$.

Дадим теперь определение морфизмов СПН. Неформально говоря, морфизм переводит переходы одной системы в переходы другой системы, сохраняя при этом независимость.

Рассмотрим некоторые вспомогательные обозначения. Частичное отображение из множества A в множество B будем обозначать как $\theta : A \to^* B$. Пусть $\mathrm{dom}\,\theta = \{a \in A \mid$ значение $\theta(a)$ определено $\}$ и $\theta A' = \{\theta(a') \mid a' \in A' \cap \mathrm{dom}\,\theta\}$, для некоторого подмножества $A' \subseteq A$.



TI'

Рис. 3:

Определение 4. Пусть $TI = (S, s^I, L, Tran, I)$ и $TI' = (S', s^{I'}, L', Tran', I')$ — СПН. *Морфизм* $h : TI \to TI'$ — это пара отображений $h = (\sigma : S \to S', \lambda : L \to^* L')$ таких, что выполнены следующие условия.

1. $\sigma(s^I) = s^{I'}$;
2. если $a \in \operatorname{dom}\lambda$ то $h(s, a, s') = (\sigma(s), \lambda(a), \sigma(s')) \in Tran'$, иначе, $\sigma(s) = \sigma(s')$;
3. если $(s, a, s')\ I\ (r, b, r)$ и $a, b \in \operatorname{dom}\lambda$, то
$$(\sigma(s), \lambda(a), \sigma(s'))\ I\ (\sigma(r), \lambda(b), \sigma(r')).$$

Пример 2. *Для того, чтобы привести пример морифизма рассмотрим СПН TI' на рис. 3. Тогда между СПН TI из примера 1 и TI' существует морфизм $(\sigma, \lambda) : TI' \to TI$, где*

$$\begin{array}{ll}
\lambda(a') = a, & \sigma(s'_0) = \sigma(s'_5) = s_0, \\
\lambda(b') = b, & \sigma(s'_1) = \sigma(s'_6) = s_1, \\
\lambda(c') = c, & \sigma(s'_2) = \sigma(s'_7) = s_2, \\
\lambda(d') \text{ \textit{не определено}}, & \sigma(s'_3) = \sigma(s'_8) = s_3, \\
 & \sigma(s'_4) = \sigma(s'_9) = s_0.
\end{array}$$

2 Временные системы переходов с независимостью

Рассмотрим временные расширения систем переходов с независимостью. Время моделируется при помощи наборов целочисленных задержек, связанных с каждым переходом. Задержки являются минимальными моментами глобального времени, после которых данный переход может выполниться. При этом i-е выполнение перехода может произойти не раньше, чем момент времени указанный в i-й задержке, и количество срабатываний перехода не может быть больше, чем количество связанных с ним задержек. Само выполнение перехода является мгновенным. Функционирование временных систем переходов с независимостью описывается в терминах временных вычислений, которые являются последовательностями пар, состоящих из перехода и момента времени, в который он выполнился.

Введем дополнительные определения. Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество всех неотрицательных чисел, $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и $\mathbb{N}^+$ обозначает множество всех конченых и бесконечных последовательностей элементов из $\mathbb{N}$. Элементы $\mathbb{N}^+$ будем обозначать $\alpha = \langle \alpha(1), \ldots, \alpha(n), \ldots \rangle$. Длину последовательности $\alpha \in \mathbb{N}^+$ будем обозначать $|\alpha|$.

Определение 5. *Временная система переходов с независимостью* (ВСПН) — это набор $TTI = (S, s^I, L, TTran, TI)$, где

- S — счетное множество *состояний*,
- $s_0 \in S$ — *начальное состояние*,
- L — счетное множество *меток*,
- $TTran \subseteq S \times L \times \mathbb{N}^+ \times S$ — множество *переходов* такое, что для любых переходов $(s, a, \delta, s'), (s, a, \delta', s') \in TTrans$ верно: $\delta = \delta'$, здесь $\delta, \delta' \in \mathbb{N}^+$ обозначают последовательности временных задержек переходов,
- $TI \subseteq TTran \times TTran$ — иррефлексивное, симметричное *отношение независимости* на переходах,

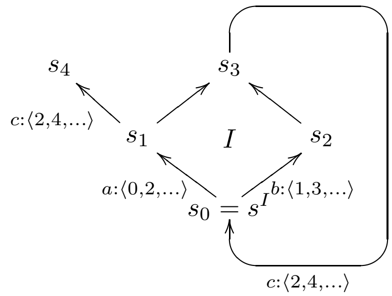
такие, что:

1. $[\![TTI]\!] = (S, s_0, L, Tran, I)$ — СПН, где, если обозначить $[\![(s, a, \delta, s')]\!] = (s, a, s')$ для каждого перехода $(s, a, \delta, s') \in TTran$, то $Tran = \{[\![t]\!] \mid t \in TTran\}$, и $[\![t]\!]\ I\ [\![t']\!] \iff t\, TI\, t'$;
2. $(s, a, \delta, s') \sim (\bar{s}, a, \bar{\delta}, \bar{s}') \Rightarrow \delta = \bar{\delta}$.

Будем обозначать класс переходов, $\sim$-эквивалентных переходу t через $[t]$.

Пример 3. *Пример ВСПН TTI приведен на рис. 4. При этом кроме меток переходов указаны связанные с переходами задержки, причем для краткости метки и задержки приведены только для одного представителя из класса $\sim$-эквивалентных переходов.*

То, что между состояниями s и s' есть переход $t = (s, a, \delta, s')$, будем обозначать $s \longrightarrow s'$, $s \xrightarrow{t} s'$ или $s \xrightarrow{a,\delta} s'$. Если направление перехода



TTI

Рис. 4:

несущественно (то есть t имеет вид (s, a, δ, s') или (s', a, δ, s)), то будем использовать обозначения $s \longleftrightarrow s'$, $s \xleftrightarrow{t} s'$ или $s \xleftrightarrow{a,\delta} s'$.

Аналогично безвременному случаю, поведение временных систем переходов с независимостью описывается в терминах *временных вычислений*, которые являются идущими из начального состояния последовательностями, состоящими из срабатываний переходов в конкретным момент времени. Причем, как было уже сказано выше, i-е срабатывание не может произойти раньше момента времени, указанного в i-м элементе задержки.

В начале введем общее понятие *временного пути*.

Определение 6. *Временной путь* в ВСПН — это последовательность (возможно, пустая) $\Pi = (t_1, d_1), \ldots, (t_n, d_n)$, где пара (t_i, d_i) обозначает выполнение перехода t_i в момент времени d_i $(1 \leq i \leq n)$, такая, что $[\![\Pi]\!] = [\![t_0]\!], \ldots, [\![t_n]\!]$ — путь в $[\![TTI]\!]$, и $i \leq j \Rightarrow d_i \leq d_j$ $(\forall 0 \leq i, j \leq n)$. Обозначим $|\Pi| = n$, $\mathrm{dom}_\tau(\Pi) = d_1$ и $\mathrm{cod}_\tau(\Pi) = d_n$. Пустой временной путь будем обозначать ϵ. В дальнейшем, когда это не вызовет неоднозначности, будем писать просто Π вместо $[\![\Pi]\!]$. Множество временных путей обозначим $\mathrm{TPath}(TTI)$.

Конкатенация временных путей Π и Π' таких, что $\mathrm{cod}_\tau(\Pi) \leq \mathrm{dom}_\tau(\Pi)$ и $\mathrm{cod}(\Pi) = \mathrm{dom}(\Pi')$, определяется естественным образом.

Введем отношение эквивалентности на временных путях, позволяющее отнести к одному классу эквивалентности временные пути, различающиеся только порядком выполнения независимых элементов.

Определение 7. Определим $\Pi \simeq \Pi' \overset{def}{\Longleftrightarrow} [\![\Pi]\!] \simeq [\![\Pi']\!]$ (очевидно, что отношение $\simeq$ задает отношение эквивалентности на множестве временных путей). Соответствующий класс эквивалентности временного пути Π будем обозначать $[\Pi]$.

Введем понятие временного вычисления. Неформально говоря, временное вычисление — это временной путь, исходящий из начального состояния, в котором соблюдены временные задержки переходов.

Определение 8. *Временное вычисление* в ВСПН — это временной путь $\Pi = (t_1, d_1), \ldots, (t_n, d_n)$, где $t_i = (s_{i-1}, a, \delta, s_i) \in TTran$ и $d_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq n)$ такой, что $[\![\Pi]\!]$ — вычисление и $k = \mathcal{N}(\Pi, [t_i]) \leq |\delta_i|$ и $\delta_i(k) \leq d_i$ $(1 \leq i \leq n)$, где $\mathcal{N}(\Pi, [t_i])$ — количество вхождений переходов, $\sim$-эквивалентных переходу t_i, в путь Π. Множество временных вычислений обозначим $\mathrm{TComp}(TTI)$.

Пример 4. *Рассмотрим ВСПН TTI из примера 3. Тогда последовательности* $(a, 0), (b, 1), (c, 2), (a, 2), (b, 3)$ *и* $(a, 4), (b, 4), (c, 4), (a, 4), (b, 4)$ *(для краткости, вместо полных обозначений переходов указаны только связанные с ними метки), являются временными вычислениями.*

Событийная временная система переходов с независимостью (сВСПН) — это ВСПН $OTTI = (S, s_0, L, TTran, TI)$ такая, что ее безвременная основа $[\![OTTI]\!]$ является сСПН, и для каждого перехода $(s, a, \delta, s') \in TTran$ верно: $|\delta| = 1$. Очевидно, что так как сСПН $[\![OTTI]\!]$ — достижимая СПН, то для каждого состояния $s \in S_{OTTI}$ существует временное вычисление $\Pi \in \mathrm{TComp}(OTTI)$ такое, что $\mathrm{cod}(\Pi) = s$.

Покажем, что для сВСПН верно, что вычисления, ведущие в одно и то же состояние, $\simeq$-эквивалентны.

Введем морфизмы ВСПН. Нетрудно показать, что в безвременном случае это определение эквивалентно классическому.

Определение 9. *Морфизм* Пусть $TTI = (S, s_0, L, TTran, TI)$ и $TTI' = (S', s'_0, L', TTran', TI')$ — ВСПН. Тогда морфизм $h : TTSI \to TTSI'$ — это пара отображений $h = (\sigma : S \to S', \lambda : L \to^* L')$, таких, что выполнены следующие условия.

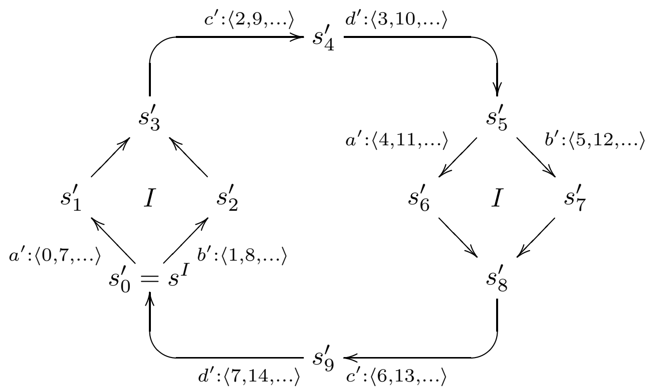
1. Для любого временного вычисления $\Pi \in \mathrm{TComp}(TTI)$ верно $h(\Pi) \in \mathrm{TComp}(TTI')$, причем $\mathrm{cod}(h(\Pi)) = \sigma(\mathrm{cod}(\Pi))$, где для произвольного пути $\Pi \in \mathrm{TPath}(TTI)$ значение $h(\Pi)$ определяется по индукции следующим образом:

   $$h(\epsilon) = \epsilon;$$
   $$h\big(\Pi((s, a, \delta, s'), d)\big) = \\ = \begin{cases} h(\Pi)\big((\sigma(s), \lambda(a), \delta', \sigma(s')), d\big), & \text{если } a \in \mathrm{dom}\,\lambda \\ h(\Pi), & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Заметим, что корректность определения $h(\Pi)$ следует непосредственно из определения ВСПН.

2. Если $\Pi, \Pi' \in \mathrm{TComp}(TTI)$ — временные вычисления такие, что $\Pi \simeq \Pi'$, то $h(\Pi) \simeq h(\Pi')$.

Пример 5. *Для того, чтобы привести пример морфизма ВСПН рассмотрим ВСПН TTI из примера 3 и ВСПН TTI' на рис. 5. Тогда морфизм (σ, λ) построенный в примере 2 также является морфизмом $(\sigma, \lambda) : TTI' \to TTI$.*



TTI'

Рис. 5:

Предложение 1. *ВСПН образуют категорию* **TTSI**.

Определение 10. Обозначим через **oTTSI** полную подкатегорию категории **TTSI**, объектами которой являются событийные ВСПН.

3 Развертка временных систем переходов с независимостью

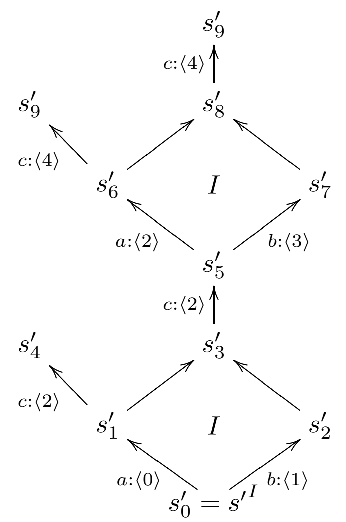
В данной части строится развертка временных систем переходов с независимостью в событийные временные системы переходов с независимостью. Неформально говоря, состояниями развернутой системы становятся классы $\simeq$-эквивалентных временных путей.

Определение 11. Определим отображение $ttsi.ottsi : \mathbf{TTSI} \to \mathbf{oTTSI}$ следующим образом: для каждой ВСПН $TTI = (S, s^I, L, TTran, TI)$ положим $ttsi.ottsi(TTI) = (S_{\simeq}, [\epsilon], L, TTran_{\simeq}, TI_{\simeq})$, где

- $S_{\simeq} = \{[\Pi] \mid \Pi \in \mathrm{TComp}(TTI)\}$,
- $TTran_{\simeq} = \big\{([\Pi], a, \langle\delta(k)\rangle, [\Pi(s, a, \delta, s')]) \mid k = \mathcal{N}(\Pi, [(s, a, \delta, s')]) + 1\big\}$,
- $\big([\Pi], a, \langle\delta(k)\rangle, [\Pi(s, a, \delta, s')]\big)\ TI_{\simeq}\ \big([\bar{\Pi}], b, \langle\bar{\delta}(k')\rangle, [\bar{\Pi}'(\bar{s}, b, \bar{\delta}, \bar{s}')]\big) \iff$
$\iff (s, a, \delta, s')\ TI\ (\bar{s}, b, \bar{\delta}, \bar{s}')$.

Покажем, что данное отображение переводит ВСПН в сВСПН.

Предложение 2. *Для каждой ВСПН TTI верно, что $ttsi.ottsi(TTI)$ — сВСПН.*



$OTTI'$

Рис. 6:

Доказательство. Пусть $TTI = (S, s^I, L, TTran, TI)$. Непосредственно из определения отображения $ttsi.ottsi$ следует, что второе требование определения ВСПН выполнено: система переходов $ttsi.ottsi(TTI)$ ациклична и последовательности задержек на переходах состоят из единственного момента времени. Поэтому, для доказательства утверждения достаточно показать, что $OTI = [\![ttsi.ottsi(TTI)]\!]$ - сСПН. Это легко сделать, следуя [13]. $\square$

Пример 6. *Приведенная на рис. 6 сВСПН $OTTI'$ (частично) представляет результат развертки ВСПН TTI из примера 3.*

Докажем теперь, что $ttsi.ottsi$ и функтор вложения $\mathbf{oTTSI} \hookrightarrow \mathbf{TTISI}$ образуют сопряжение. Для этого построим морфизм, который, как будет показано дальше, является коединицей данного сопряжения.

Определение 12. Для каждой ВСПН TTI определим морфизм $\varepsilon_{TTI} = (1_L, \sigma_\varepsilon) : ttsi.ottsi(TTI) \to TTI$ как $\sigma_\varepsilon([\Pi]) = \mathrm{cod}(\Pi)$.

Предложение 3. *ε_{TTI} — морфизм ВСПН для всех $TTI \in \mathbf{TTSI}$.*

Доказательство. Покажем, что для ε_{TTI} выполнен первый пункт определения морфизмов ВСПН, то есть что для каждого временного вычисления $\tilde{\Pi} \in \mathrm{TComp}(ttsi.ottsi(TTI))$ верно,что $\varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi}) \in \mathrm{TComp}(TTI)$ и $\mathrm{cod}(\varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi})) = \sigma_\varepsilon(\mathrm{cod}(\tilde{\Pi}))$. Проведем индукцию по длине временного вычисления $\tilde{\Pi}$. Если $\tilde{\Pi} = \epsilon$, то требование выполнено с очевидностью.

Пусть $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}'(([\Pi], a, \tilde{\delta}, [\Pi']), \tilde{d})$, где $\Pi' = \Pi((s, a, \delta, s'), d)$. Согласно индукционной гипотезе, $\mathrm{cod}(\varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi}')) = \sigma_\varepsilon(\mathrm{cod}(\tilde{\Pi}')) = \mathrm{cod}(\Pi) = s$. Тогда, по определению,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi}) &= \varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi}')((\mathrm{cod}(\Pi), a, \delta, \mathrm{cod}(\Pi')), d)\\ &= \varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi}')((s, a, \delta, s'), d).\end{aligned}$$

Следовательно, верна индукционная гипотеза и

$$\mathrm{cod}(\varepsilon_{TTI}(\tilde{\Pi})) = s' = \mathrm{cod}(\Pi') = \sigma_\varepsilon(\mathrm{cod}(\tilde{\Pi}')).$$

Осталось проверить, что соблюдены временные ограничения. Для этого нужно показать, что $\delta(k) \le \tilde{\delta}$, где $k = \mathcal{N}\big(\Pi, [(s, a, \delta, s')]\big) + 1$. Но по определению *ttsi.ottsi* имеем: $\tilde{\delta} = \langle \delta(k) \rangle$, и, так как $\tilde{\Pi}$ — временное вычисление, то $\delta(k) \le \tilde{d}$.

То что ε_{TTI} удовлетворяет второму пункту определения следует непосредственно из определения отношения $TI_{\simeq}$. □

Для того, чтобы установить сопряжение, покажем, что ε_{TTI} является универсальным.

Лемма 1 (морфизм ε_{TTI} является универсальным)**.** *Для любой ВСПН TTI, любой сВСПН $OTTI$, и любого морфизма $h : OTTI \to TTI$, имеется уникальный морфизм $h' : OTTI \to ttsi.ottsi(TTI)$ такой, что $h = \varepsilon_{TTI} \circ h'$:*

$$\begin{tikzcd} TTI \\ OTTI \arrow[u, "\forall h"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ttsi.ottsi(TTI) \\ OTTI \arrow[u, dashed, "\exists! h'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTI & ttsi.ottsi(TTI) \arrow[l, "\varepsilon_{TTI}"'] \\ OTTI \arrow[u, "h"] \arrow[ur, dashed, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Очевидно, что если $h = (\lambda, \sigma)$, то морфизм h' должен иметь вид $h' = (\lambda, \bar{\sigma})$. Положим $\bar{\sigma}(s) = [h(\Pi_s)]$, где $\Pi_s \in \mathrm{TComp}(OTTI)$ — временное вычисление такое, что $\mathrm{cod}(\Pi_s) = s$. Корректность данного определения следует из того, что, как нетрудно показать используя результаты [13], если $\Pi, \Pi' \in \mathrm{TComp}(OTTI)$ и $\mathrm{cod}(\Pi) = \mathrm{cod}(\Pi')$, то $\Pi \simeq \Pi'$, и h сохраняет отношение $\simeq$ согласно определению морфизмов.

Покажем, что h' — морфизм.

1. Пусть $\Pi \in \mathrm{TComp}(OTTI)$ — временное вычисление. Проведем индукцию по длине Π. Очевидно, $h'(\epsilon) = \epsilon$. Пусть $\Pi = \Pi'((s, a, \delta, s'), d)$ и $h'(\Pi')$ — временное вычисление. Для случая, когда $a \notin \mathrm{dom}\,\lambda$ достаточно рассмотреть следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &\mathrm{cod}(h'(\Pi)) = \\ \mathrm{cod}(h'(\Pi')) = \bar{\sigma}(\mathrm{cod}(\Pi')) = [h(\Pi')] = &[h(\Pi)] = \\ &= \bar{\sigma}(\mathrm{cod}(\Pi)).\end{aligned}$$

Предположим, что $a \in \mathrm{dom}\,\lambda$. Тогда,

$$h(\Pi) = h(\Pi')((\sigma(s), \lambda(a), \bar{\delta}, \sigma(s')), d) \in \mathrm{TComp}(TTI).$$

Следовательно, $\delta(k) \leq d$, где

$$k = \mathcal{N}(h(\Pi), [(\sigma(s), \lambda(a), \bar{\delta}, \sigma(s'))]).$$

Так как $\mathrm{cod}(\Pi') = s$ и $\mathrm{cod}(\Pi) = s'$, то

$$h'(\Pi) = h'(\Pi')\big(([h(\Pi')], \lambda(a), \langle\tilde{d}\rangle, [h(\Pi)]), d\big), \text{и}$$
$$\mathrm{cod}(h'(\Pi)) = [h(\Pi)] = \bar{\sigma}(s') = \bar{\sigma}(\mathrm{cod}(\Pi)).$$

Осталось заметить, что по определению *ttsi.ottsi*, $\tilde{d} = \bar{\delta}(k)$, и, следовательно $\tilde{d} \leq d$ и $h'(\Pi) \in \mathrm{TComp}(ttsi.ottsi(TTI))$.

2. Для того, чтобы показать, что для h' выполнен второй пункт определения морфизма, достаточно заметить, что h' сохраняет отношение независимости. Действительно, пусть

$$t = (s, a, \delta, s')\ TI_{OTTI}\ (\bar{s}, b, \bar{\delta}, \bar{s}') = \bar{t}.$$

Тогда, как нетрудно показать, $h(t)\ TI_{TTI}\ h(\bar{t})$ и, согласно определению *ttsi.ottsi*, для любых переходов

$$\tilde{t} = ([\Pi], \lambda(a), \tilde{\delta}, [\Pi(h(t), d)]),\ \bar{\tilde{t}} = ([\bar{\Pi}], \lambda(b), \bar{\tilde{\delta}}, [\bar{\Pi}(h(\bar{t}), \tilde{d})])$$

в $TTran_{\simeq}$ верно: $\tilde{t}\ TI_{\simeq}\ \bar{\tilde{t}}$. Осталось заметить, что именно такой вид имеют образы t и $\bar{t}$ под действием h' и, следовательно $h'(t)\ TI_{\simeq}\ h'(\bar{t})$.

Чтобы показать, что диаграмма действительно коммутирует, достаточно заметить, что если $\bar{\sigma}(s) = [h(\Pi_s)]$, то $\mathrm{cod}(h(\Pi_s)) = \sigma(s)$ и, следовательно $\sigma_\varepsilon \circ \bar{\sigma} = \sigma$. Единственность h' очевидна и следует из того, что так как диаграмма коммутирует, то для каждого $s \in S_{OTTI}$ образом s должен $\simeq$-класс вычислений, ведущих к s, но, как нетрудно показать, используя результаты [13], такой класс единственен. $\square$

Следующая теорема дает теоретико-категорную характеризацию развертки.

Теорема 1 ($\hookrightarrow\dashv$ *ttsi.ottsi*)**.** *Отображение ttsi.ottsi может быть расширено до функтора, который сопряжен к функтору включения* $\hookrightarrow$: **oTTSI** $\to$ **TTSI** *справа. Более того, это сопряжение является корефлексией.*

Доказательство. Согласно результатам теории категорий, наличие сопряжения и расширение *ttis.ottsi* до функтора следует непосредственно из леммы 1. Покажем, что это сопряжение является корефлексией. Для этого нужно установить единицу сопряжения и показать, что она является изоморфизмом.

В качестве кандидата на единицу сопряжения определим отображение $\eta_{OTTI} = (1_L, \sigma_\eta) : OTTI \to \mathit{ttsi}.\mathit{ottsi}(OTTI)$ для каждой сВСПН $OTTI$ и $s \in S_{OTTI}$ следующим образом: $\sigma_\eta(s) = [\Pi_s]$, где $\Pi_s \in \mathrm{TComp}(OTTI)$ — вычисление, такое, что $\mathrm{cod}(\Pi_s) = s$. Нетрудно видеть, что η_{OTTI} — морфизм в категории **oTTSI**. Далее, если $\varepsilon_{OTTI} = (1_L, \sigma_\varepsilon) : \mathit{ttsi}.\mathit{ottsi}(OTTI) \to OTTI$, то $\sigma_\varepsilon \circ \sigma_\eta = 1_{S_{OTTI}}$ и $\sigma_\eta \circ \sigma_\varepsilon = 1_{S_{\mathit{ttsi}.\mathit{ottsi}(OTTI)}}$. Следовательно, η_{OTTI} — изоморфизм.

Для того, чтобы показать, что η_{OTTI} — единица сопряжения, согласно [11, стр. 83], необходимо показать коммутативность следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd} OTTI \arrow[r, "\eta_{OTTI}"] \arrow[dr, equal] & \mathit{ttsi}.\mathit{ottsi}(OTTI) \arrow[d, "\varepsilon_{OTTI}"] \\ & OTTI \end{tikzcd}$$

Но это следует непосредственно из того, что, как уже было показано выше, $\sigma_\epsilon \circ \sigma_\eta = 1_S$. □

4 Временные системы переходов с независимостью и временные первичные структуры

В данной части будет построена взаимосвязь между сВСПН и временными первичными структурами событий. Для этого будут определены два отображения, действующие между категориями моделей, и показано, что они образуют корефлексию. В начале определим отображение, переводящее временные первичные структуры событий в сВСПН. Неформально говоря, образом ВПСС TP является сВСПН, состояниями которой являются (некоторые) временные конфигурации TP (такие, в которых значение счетчика глобального времени и максимум задержек событий, входящих в конфигурацию, совпадают), а переходы между состояниями происходят через происхождение события в данной конфигурации TP.

В начале кратко приведем определения связанные с временными первичными структурами событий [1].

Определение 13. *Первичная структура* — это тройка $P = (E, \leq, \#)$, где $\leq \subseteq E \times E$ — отношение *причинной зависимости*, задающее частичный порядок на множестве E и удовлетворяющая принципу «конечности причин», т.е. для каждого события $e \in E$ верно, что $\{e' \in E \mid e' \leq e\}$ — конечное множество, а $\#$ — отношение конфликта, удовлетворяющая принципу ‘наследования конфликта’, т.е. $e \# e' \leq e'' \Rightarrow e \# e''$.

Поведение первичных структур описывается в терминах конфигураций — подмножеств бесконфликтных событий, лево-замкнутых относительно причинной зависимости. Пусть $P = (E, \leq, \#)$ — первичная структура. Тогда бесконфликтное подмножество $C \subseteq E$ — *конфигурация*, если для каждого события $e \in C$ верно $\downarrow e \subseteq C$, где $\downarrow e = \{e' \in E \mid e' \le e\}$. Множество конфигураций первичной структуры P будем обозначать $Conf(P)$.

Определение 14. *Временная первичная структура событий (ВПСС) —* это кортеж $TP = (E, \Delta)$, где $P = (E, \le, \#)$ — первичная структура событий и $\Delta : E \to \mathbb{N}$ — ***функция временных задержек*** такие, что отношение причинной зависимости и функция временных задержек согласованы: $e' \le e \Rightarrow \Delta(e') \le \Delta(e)$.

Пусть $TP = (E, \Delta)$ — ВПСС. Тогда *временная конфигурация* в TP — это пара (C, t), где $C \in Conf(E)$ и $t \in \widetilde{\mathbb{N}}$ такие, что $\Delta(e) \le t$ для каждого $e \in C$. Множество временных конфигураций временной структуры TP будем обозначать как $TConf(TP)$. Последовательность $(e_0, t_0), \dots, (e_n, t_n)$ будем назвать *гарантирующей* для временной конфигурации (C, t), если $TC_i = (\{e_0, \dots, e_n\}, t_i)$ — временные конфигурации для любого $i = 0, \dots, n$, и $TC_n = (C, t)$.

Определение 15. Пусть $TP = (E, \le, \#, \Delta)$ и $TP' = (E', \le', \#', \Delta')$ — ВПСС. Тогда частичное отображение $\theta : E \to^* E'$ — ***морфизм***, если для всех $e, e' \in E$ верно:

- $\downarrow\theta(e) \subseteq \theta(\downarrow e)$,
- $\theta(e) = \theta(e') \Rightarrow (e \# e') \vee (e = e')$,,
- $\Delta'(\theta(e)) \le \Delta(e)$.

Временные первичные структуры событий вместе с определенными выше морфизмами образуют категорию **TPES**.

Определим функтор, переводящий ВПСС в сВСПН.

Определение 16. Определим отображение $tpes.ottsi$: **TPES** $\to$ **oTTSI** следующим образом. Рассмотрим ВПСС $TP = (E, \le, \#, \Delta)$ и определим $tpes.ottsi(TP) = (C^0(TConf(PE)), (\varnothing, 0), E, TTran, TTI)$, где

- $C^0(TConf(TP)) = \big\{(C, d) \in C(TConf(PE)) \mid \Delta(C) = d\big\}$, где $\Delta(C) = \max\{\Delta(e) \mid e \in C\}$;
- $\big((C, d), e, \delta, (C', d')\big) \in TTran \iff C' \setminus C = \{e\} \wedge \delta = \langle\Delta(e)\rangle$;
- $\big((C, d), e, \delta, (C', d')\big)\ TI\ \big((\bar{C}, \bar{d}), \bar{e}, \bar{\delta}, (\bar{C}', \bar{d}')\big) \iff e \smile \bar{e}$.

Пример 7. *Пример действия отображения tpes.ottsi приведен на рис. 7.*

Теперь покажем, что отображение *tpes.ottsi* определено корректно, то есть переводит ВПСС в сВСПН.

Предложение 4. *Для каждой ВПСС TP верно: $tpes.ottsi(TP)$ — сВСПН.*

Доказательство. Следует непосредственно из результатов [13]. ☐

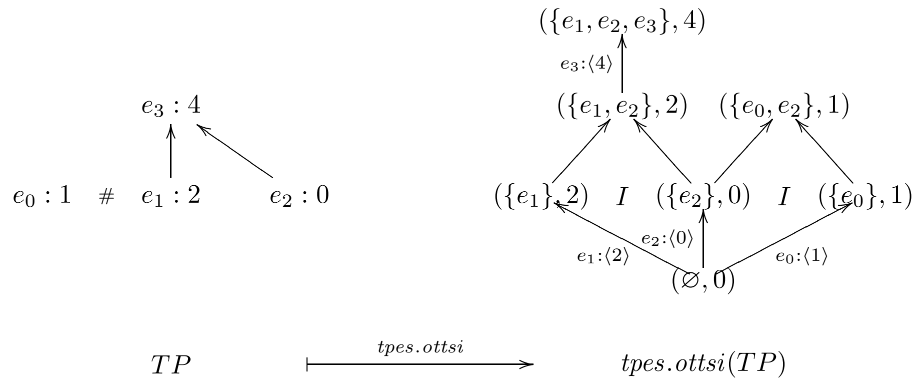


Рис. 7:

Перейдем теперь к построению отображения, действующего в обратную сторону, и переводящего сВСПН в ВПСС. Неформально говоря, сВСПН $OTTI$ переводится в ВПСС, событиями которой являются классы $\sim$-эквивалентных переходов $OTTI$. При этом временные задержки на событиях согласовываются с отношением причинной зависимости.

Определение 17. Определим функтор $ottsi.tpes$: **oTTSI** $\to$ **TPES** следующим образом. Рассмотрим сВСПН $OTTI = (S, s^I, L, TTran, TI)$. Тогда $ottsi.tpes(OTTI) = (TTran_\sim, \leq, \#, \Delta)$, где

- $TTran_\sim = \{[(s, a, \delta, s')] \mid (s, a, \delta, s') \in TTran$ — множество классов $\sim$-эквивалентных переходов;
- $[(s, a, \delta, s')] < [(\bar{s}, \bar{a}, \bar{\delta}, \bar{s}')]_\sim \iff$
  $\forall \Pi((\underline{\bar{s}}, \bar{a}, \bar{\delta}, \underline{\bar{s}}'), d) \in \mathrm{TComp}(OTTI) \,.\, \big((\underline{\bar{s}}, \bar{a}, \bar{\delta}, \underline{\bar{s}}') \sim (\bar{s}, \bar{a}, \bar{\delta}, \bar{s}') \Rightarrow \exists \underline{d} \in N,$
  $(\underline{s}, a, \delta, \underline{s}') \sim (s, a, \delta, s') \,.\, ((\underline{s}, a, \delta, \underline{s}'), \underline{d}) \in \Pi\big)$ и $\leq = (<)^*$;
- $[(s, a, \delta, s')] \# [(\bar{s}, \bar{a}, \bar{\delta}, \bar{s}')]_\sim \iff$
  $\forall \Pi \in \mathrm{TComp}(OTTI)$,
  $\forall (\underline{s}, a, \delta, \underline{s}') \sim (s, a, \delta, s'), \forall (\underline{\bar{s}}, \bar{a}, \bar{\delta}, \underline{\bar{s}}') \sim (\bar{s}, \bar{a}, \bar{\delta}, \bar{s}')$,
  $\forall d, \bar{d} \in \mathbb{N} \,.\, (\underline{s}, a, \delta, \underline{s}', d) \in \Pi \Rightarrow ((\underline{\bar{s}}, \bar{a}, \bar{\delta}, \underline{\bar{s}}'), \bar{d}) \notin \Pi$;
- $\Delta\big([s, a, \langle d\rangle, s']\big) = \max\{\bar{d} \mid [\bar{s}, \bar{a}, \langle \bar{d}\rangle, \bar{s}'] \leq [s, a, \langle d\rangle, s']\}$.

Для морфизма $h = (\sigma, \lambda) : OTTI \to OTTI'$ пусть $ottsi.tpes(h) = \theta$, где

$$\theta([(s, a, \delta, s')]) = \begin{cases} [(\sigma(s), \lambda(a), \bar{\delta}, \sigma(s')], & \text{если } a \in \mathrm{dom}\,\lambda \\ \text{значение не определено}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$
\begin{tikzcd}
{[(s'_0, a, \langle 0\rangle, s'_1)] : 0} \arrow[d] \arrow[dr] & {[(s'_0, a, \langle 1\rangle, s'_2)] : 1} \arrow[d] \arrow[dl, dash, dotted, "\#"'] \\
{[(s'_1, c, \langle 2\rangle, s'_4)] : 2} & {[(s'_3, c, \langle 2\rangle, s'_5)] : 2} \arrow[d] \arrow[dl] \\
{[(s'_5, a, \langle 2\rangle, s'_6)] : 2} \arrow[d] \arrow[dr] & {[(s'_3, b, \langle 3\rangle, s'_7)] : 3} \arrow[d] \arrow[dl, dash, dotted, "\#"'] \\
{[(s'_6, c, \langle 2\rangle, s'_8)] : 2} & {[(s'_8, c, \langle 2\rangle, s'_9)] : 4}
\end{tikzcd}
$$

$ottsi.tpes(OTTI')$

Рис. 8:

Пример 8. *Пример действия* $ottsi.tpes$ *на сВСПН* $OTTI'$ *из примера 6 приведен на рис. 8.*

Установим корректность вышеприведенного определения.

Лемма 2. *Для каждой сВСПН* $OTTI$ *верно:* $ottsi.tpes(OTTI)$ *— ВПСС.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 3. *Пусть* $h = (\lambda, \sigma) : OTTI \to OTTI'$ *— морфизм сВСПН. Тогда* $ottsi.tpes(h) : ottsi.tpes(OTTI) \to ottsi.tpes(OTTI')$ *— морфизм ВПСС.*

Доказательство. Пусть $\theta = ottsi.tpes(h)$. Рассмотрим некоторую временную конфигурацию $(C, \Delta(C)) \in \mathrm{TComp}(ottsi.tpes(OTTI))$ и покажем, что $(\theta C, \Delta(C))$ — временная конфигурация в $ottsi.tpes(OTTI)$. Аналогично доказательству утверждения 4.13 [13, стр. 319] нетрудно показать, что $\theta(C)$ — временная конфигурация и для любых событий $e, e' \in C$ верно $\theta(e) = \theta(e') \Rightarrow e = e'$.

Осталось доказать, что соблюдены временные ограничения. Рассмотрим некоторое событие e ВПСС $ottsi.tpes(OTTI)$, временную конфигурацию $TC = (\downarrow e, \Delta(e))$ и последовательность $(e_1, d_1), \ldots, (e_n = e, d_n = \Delta(e))$, являющуюся гарантирующей для TC. В сВСПН $OTTI$ ей соответствует временное вычисление $\Pi = (t_1, d_1), \ldots, (t_n, d_n)$, где $t_i \in e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $h(\Pi)$ — временное вычисление в $OTTI'$, и поэтому для каждого $i = 1, \ldots, n$ верно: $\delta'_{h(t_i)}(1) \leq d_i$. Но тогда, так как показано выше, θ является морфизмом безвременных первичных структур, то $\downarrow\theta(e) \subseteq \theta(\downarrow e) = \{[h(t_i)] \mid i = 1, \ldots, n\}$. Следовательно, $\Delta(\theta(e)) \leq \max\{\delta'_{h(t_i)}(1) \mid i = 1, \ldots, n\} \leq d_n = \Delta(e)$, что и требовалось показать. □

Предложение 5. $ottsi.tpes : \mathbf{oTTSI} \to \mathbf{TPES}$ *— функтор.*

Доказательство. Следует из двух предыдущих лемм. □

Перейдем к установлению корефлексии.

Лемма 4. *Пусть $OTTI$ — сВСПН, $(C, \Delta(C)) \in C^0(ottsi.tpes(OTTI))$ — временная конфигурация и $\zeta = ([t_1], d_1), \ldots, ([t_n], d_n)$ — гарантирующая последовательность для $(C, \Delta(C))$. Тогда существует временное вычисление*

$$\Pi(\zeta) = ((s_0, a_1, \delta_1, s_1), d_1), \ldots, ((s_{n-1}, a_n, \delta_n, s_n), d_n),$$

такое, что $[(s_{i-1}, a, \delta, s_i)] = [t_i]$ для $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Построим временное вычисление $\Pi(\zeta)$ следующим образом.

- Переход $(s_0, a_1, \delta_1, s_1)$ — это единственный представитель $[t_1]$ такой, что он начинается из состояния s^I_{OTTI}. Существование такого перехода нетрудно показать используя результаты [13], а его единственность следует из пункта 1 определения СПН.

- Каждый последующий переход определяется по индукции. Переход $(s_{i-1}, a_i, \delta_i, s_)$ — единственный представитель класса $[t_i]$ такой, что он начинается из состояния s_{i-1}. Опять, его существование несложно показать используя результаты [13], и он единственен в силу пункта 1 определения СПН. □

Определим следующее отображение, которое будет полезно при установлении универсальности единицы сопряжения.

Определение 18. Пусть $OTTI$ — сВСПН. Определим отображение $\mathcal{L}$: $C^0(TConf(ottsi.tpes(OTTI))) \to S_{OTTI}$ следующим образом: $\mathcal{L}(C, \Delta(C)) = s$, где s — это состояние, такое, что $s = \mathrm{cod}(\Pi(\zeta))$, построенным по гарантирующей последовательности ζ для временной конфигурации $(C, \Delta(C))$, способом, описанным в лемме 4. Несложно показать, что данное определение не зависит от выбора ζ и, следовательно, корректно.

Следующая лемма характеризует отображение $\mathcal{L}$.

Предложение 6. $(\mathcal{L}, 1_L)$: *$tpes.ottsi \circ ottsi.tpes(OTTI) \to OTTI$ — морфизм сВСПН.*

Доказательство. Легко, следуя [13]. □

Определим теперь морфизм, который, как будет показано далее, является единицей устанавливаемого сопряжения.

Определение 19. Для каждой ВПСС TP определим морфизм $\eta_{TP} : TP \to ottsi.tpes \circ tpes.ottsi(TP)$ следующим образом:

$$\eta_{TP}(e) = [(C, \Delta(C)), e, \langle\Delta(e)\rangle, (C \cup \{e\}, \Delta(C \cup \{e\})].$$

Лемма 5. *η_{TP} — изоморфизм в категории* **TPES**.

Доказательство. Пусть $ottsi.tpes \circ tpes.ottsi(TP) = TP' = (E', \#', \leq', \Delta')$. Нетрудно показать, что

$$\begin{gathered}\big((C, \Delta(C)), e, \langle \Delta(e) \rangle, (C', \Delta(C'))\big) \\ \sim \\ \big((\bar{C}, \Delta(\bar{C})), e, \langle \Delta(e) \rangle, (\bar{C}', \Delta(\bar{C}'))\big) \\ \Longleftrightarrow \\ (C' \setminus C) = (\bar{C}' \setminus \bar{C}).\end{gathered}$$

Таким образом, отображение η_{TP} определено корректно и является инъективным. Так как каждый переход $\big((C, \Delta(C)), e, \langle \Delta(e) \rangle, (C', \Delta(C'))\big)$ в сВСПН $tpes.ottsi(TP)$ соответствует срабатыванию события e в ВПСС TP, причем $\{e\} = (C' \setminus C)$, то отображение η_{TP} также является сюрьективным.

Покажем, что η_{TP} — морфизм. Для этого рассмотрим временную конфигурацию $(C, d) \in TConf(TP)$. В силу вышеприведенных рассуждений достаточно показать, что $(\eta_{TP}C, d))$ — временная конфигурация TP'. Очевидно, что $\Delta(e) = \Delta'(\eta_{TP}(e))$. Поэтому доказательство сводится к необходимости установить, что $\eta_{TP}C$ — конфигурация. Это легко доказать, следуя рассуждениям приведенным в [13].

То, что η_{TP} — изоморфизм, очевидно. ☐

Для того, чтобы установить существование сопряжения, нужно показать, что морфизм η_{TP} является универсальным.

Предложение 7 (морфизм η_{TP} является универсальным)**.** *Для любой ВПСС TP, сВСПН $OTTI$ и любого морфизма $\theta : TP \to ottsi.tpes(OTTI)$ существует единственный морфизм h : $tpes.ottsi(TP)$ такой, что $\theta = ottsi.tpes(h) \circ \eta_{TP}$:*

$$\begin{tikzcd} TP \arrow[d, "\forall\theta"'] & tpes.ottsi(TP) \arrow[d, "\exists! h"'] \\ ottsi.tpes(OTTI) & OTTI \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} TP \arrow[r, "\eta_{TP}"] \arrow[d, "\theta"'] & ottsi.tpes \circ tpes.ottsi(TP) \arrow[dl, dashed, "ottsi.tpes(h)"] \\ ottsi.tpes(OTTI) & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $TP' = ottsi.tpes(OTTI)$ и $h = (\sigma, \lambda)$, где

- $\sigma(C, \Delta(C)) = \mathcal{L}(\theta C, \Delta_{TP'}(\theta C)))$;
- $\lambda(e) = \begin{cases} a, & \text{если } e \in \mathrm{dom}\,\theta \text{ и } \theta(e) = [(s, a, \delta, s')], \\ \text{неопределено}, & \text{иначе.} \end{cases}$

Нетрудно заметить, что $h = (\mathcal{L}, 1_{L_{OTTI}}) \circ tpes.ottsi(\theta)$ и

$$h : tpes.ottsi(TP) \to tpes.ottsi \circ ottsi.tpes(OTTI) \to OTTI.$$

Из этого следует, что h — корректно определенный морфизм сВСПН.

Покажем теперь, что $\theta = ottsi.tpes(h) \circ \eta_{TP}$, то есть что диаграмма коммутирует. Рассмотрим событие $e \in E_{TP}$. Если $e \notin \operatorname{dom}\theta$, то $e \notin \operatorname{dom}\lambda$ и следовательно значения обеих сторон равенства не определены. Пусть теперь $e \in \operatorname{dom}\theta$. Тогда имеем:

$$\begin{array}{rcl} e \overset{\eta_{TP}}{\longmapsto} & \big[\big((C, \Delta(C)), e, \langle\Delta(e)\rangle, (C' = C \cup \{e\}, \Delta(C'))\big)\big] \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle ottsi.tles(h)} \\ & \big[\big(\mathcal{L}(\theta C, \Delta_{TP'}(\theta C)), \lambda(e), \delta, \mathcal{L}(\theta C', \Delta_{TP'}(\theta C'))\big)\big] \\ & \Big\| \\ & \big[\big(\sigma(C, \Delta(C)), \lambda(e), \delta, \sigma(C', \Delta(C'))\big)\big]\,. \end{array}$$

Заметим теперь, что $\big((\theta C, \Delta_{TP'}(\theta C)), \lambda(e), \delta, (\theta C', \Delta_{TP'}(\theta C'))\big)$ — переход в $tpes.ottsi \circ ottsi.tpes(OTTI)$, соответствующий срабатыванию события $\theta(e)$. Тогда, как нетрудно показать, используя результаты [13], имеем:

$$\big(\mathcal{L}(\theta C, \Delta_{TP'}(\theta C)), \lambda(e), \delta, \mathcal{L}(\theta C', \Delta_{TP'}(\theta C'))\big)$$

— переход в $OTTI$. Нетрудно видеть, что так как $C' = C \cup \{e\}$, то

$$\big[\big(\mathcal{L}(\theta C, \Delta_{TP'}(\theta C)), \lambda(e), \delta, \mathcal{L}(\theta C', \Delta_{TP'}(\theta C'))\big)\big] = \theta(e).$$

Осталось показать единственность h. Допустим, что существует морфизм $h' \neq h$ такой, что $\theta = ottsi.tpes(h) \circ \eta_{TP}$. Очевидно, что морфизм h' должен иметь вид (σ', λ). Из первой части доказательства следует, что для каждого события $e \in \operatorname{dom}\theta$ в силу коммутативности диаграммы выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} ottsi.tpes(h)\left(\big[(C, \Delta(C)), e, \langle\Delta(e)\rangle, (C', \Delta(C'))\big]\right) &= \\ \big[\big(\sigma(C, \Delta(C)), \lambda(e), \delta, \sigma(C', \Delta(C'))\big)\big] &= \\ \theta(e) &= \\ \big[\big(\sigma'(C, \Delta(C)), \lambda(e), \delta, \sigma'(C', \Delta(C'))\big)\big]\,. \end{aligned}$$

Индукцией по размеру конфигурации C нетрудно показать, что из этого следует, что $\sigma = \sigma'$. □

Следующая теорема окончательно устанавливает существование сопряжения.

Теорема 2 ($tpes.ottsi \dashv ottsi.tpes$)**.** *Отображение $tpes.ottsi$ может быть расширено до функтора $tpes.ottsi$: $\mathbf{TPES} \to \mathbf{oTTSI}$ который является сопряженным к функтору $ottsi.tpes$ слева. Более того, данное сопряжение является корефлексией.*

Доказательство. Следует непосредственно из предыдущей леммы и того, что η_{TP} — изоморфизмы для каждой ВПСС $TP \in \mathbf{TPES}$. □

5 Временные системы переходов с независимостью и помеченные области

В данной части суммируются полученные выше результаты и цепочка корефлексий доводится до категории помеченные областей **MDom**, введенных в [1]. Этим показывается, что помеченные области полноценно представляют семантику поведения ВСПН. Неформально говоря, помеченные области — это области Скотта в которых с каждым первичным интервалом связана пометка: либо 0, либо 1, чем моделируются мгновенные и задержанные действия соответственно.

Теорема 3. *Пара функторов*

$$\begin{aligned} tpes.mdom \circ ottsi.tpes \circ ttsi.ottsi &: \mathbf{TTSI} \to \mathbf{MDom} \\ \hookrightarrow \circ\, tpes.ottsi \circ mdom.tpes &: \mathbf{MDom} \to \mathbf{TTSI} \end{aligned}$$

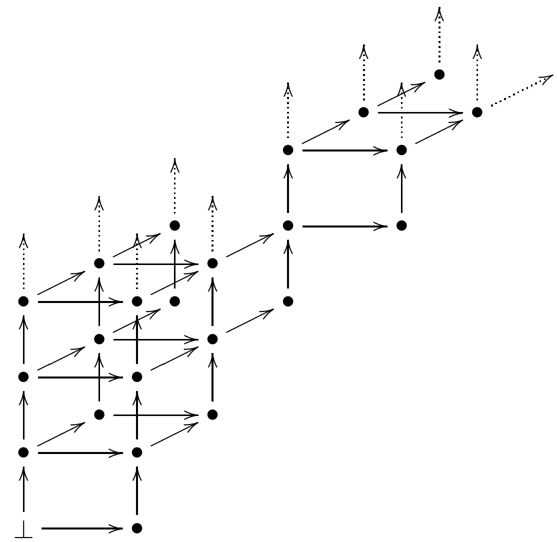
задает сопряжение между категориями **TTSI** *и* **MDom***. Более того, данное сопряжение является корефлексией.*

Доказательство. Результаты, полученные выше совместно с результатами [1] позволяют рассмотреть следующую диаграмму.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{TTSI} \arrow[r, shift left, "ttsi.ottsi"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{oTTSI} \arrow[l, hook', shift left] \arrow[r, shift left, "ottsi.tpes"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{TPES} \arrow[l, shift left, "tpes.ottsi"] \arrow[r, shift left, "tpes.mdom"] \arrow[r, phantom, "\cong\ [1]"] & \mathbf{MDom} \arrow[l, shift left, "mdom.tpes"] \end{tikzcd}$$

Из результатов [1], и теорем 1 и 2 следует, что все три пары функторов образуют корефлексии. Тогда, из теоретико-категорных соображений имеем, что и их композиции составляют корефлексию, что и требовалось доказать. □

Пример 9. *На рис. 5 (частично) приведена помеченная область для ВСПН из примера 3. Чтобы не перегружать рисунок, пометка опущена: вертикальные первичные интервалы помечены 0, горизонтальные — 1.*



$tpes.mdom \circ ottsi.tpes \circ ttsi.ottsi(TTI)$

Рис. 9:

6 Заключение

В работе были введены и изучены временные расширения хорошо известной модели семантики «истинного параллелизма» — систем переходов с независимостью. Для данного расширения были получены следующие результаты:

- построена развертка временных систем переходов и дана ее теоретико-категорная характеризация как корефлексии;
- установлена корефлексия между категорией событийных системам переходов с независимостью и категорией временных первичных структур событий;
- используя вышеприведенные результаты совместно с уже известными, определена семантика помеченных областей для временных систем переходов с независимостью.

Список литературы

[1] *Вирбицкайте И.Б., Дубцов Р.С.* Семантические области временных структур событий // *Программирование.* — 2008. — Vol. 3. — Pp. 1–19.

[2] *Alur R., Dill D.* A Theory of Timed Automata // *Theoretical Computer Science.* — 1994. — Vol. 126, no. 2. — Pp. 183–235.

[3] *Bednarczyk M.* Categories of asynchronous systems: Ph.D. thesis. — University of Sussex Sussex, UK, 1987.

[4] *Cattani G., Sassone V.* Higher dimensional transition systems // *Logic in Computer Science, 1996. LICS'96. Proceedings., Eleventh Annual IEEE Symposium on.* — 1996. — Pp. 55–62.

[5] *Goubault E.* Domains of Higher-Dimensional Automata // *Proceedings of the 4th International Conference on Concurrency Theory.* — 1993. — Pp. 293–307.

[6] *Goubault E., Jensen T.* Homology of Higher Dimensional Automata // *International Conference on Concurrency Theory.* — 1992. — Pp. 254–268.

[7] *Henzinger T., Pnueli A., Manna Z.* Timed Transition Systems // *Lecture Notes in Computer Science.* — 1992. — Vol. 600. — Pp. 226–251.

[8] *Hildebrandt T., Sassone V.* Comparing Transition Systems with Independence and Asynchronous Transition Systems // *International Conference on Concurrency Theory.* — 1996. — Pp. 84–97.

[9] *Hune T., Nielsen M.* Timed bisimulation and open maps // *Lecture Notes in Computer Science.* — 1998. — Vol. 1450. — Pp. 378–387.

[10] *Keller R.* Formal verification of parallel programs // *Communications of the ACM.* — 1976. — Vol. 19, no. 7. — Pp. 371–384.

[11] *McLane S.* Categories for the Working Mathematician // *Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin.* — 1971.

[12] *Pratt V.* Modeling Concurrency with Geometry // *Conference Record of the Eighteenth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages.* — 1991. — Pp. 311–322.

[13] *Sassone V., Nielsen M., Winskel G.* Models for concurrency: towards a classification // *Theoretical Computer Science.* — 1996. — Vol. 170, no. 1-2. — Pp. 297–348.

[14] *Shields M.* Concurrent Machines // *The Computer Journal.* — 1985. — Vol. 28, no. 5. — Pp. 449–465.

[15] *van Glabbeek R.* Bisimulation semantics for higher dimensional automata // *Manuscript available on the web as http://theory. stanford. edu/rvg/hda.*

[16] *van Glabbeek R., Plotkin G.* Configuration structures // *Proceedings of LICS.* — 1995. — Vol. 95. — Pp. 199–209.

[17] *Winskel G., Nielsen M.* Models for concurrency // *Handbook of Logic in Computer Science.* — 1995. — Vol. 4. — Pp. 1–148.