Численные методы для интегральных моделей с неизвестной задержкой.

А.Н. Тында

Пензенский государственный университет

e-mail: tyndaan@mail.ru

Mathematics Subject Classification 2000: 45D05;45G15;65R20

1 Введение

В работе будем рассматривать системы нелинейных интегральных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = f(t), \end{cases} \qquad t \in [t_0, T),\ t_0 < T \leqslant \infty, \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = Y_0 < t_0,\ x(\tau) \equiv \varphi_0(\tau),\ \tau \in (-\infty, t_0].$$

Здесь предполагается, что заданные функции $H(t,\tau,x),\ K(t,\tau,x), f(t), \varphi_0(t)$ непрерывны, неотрицательны при $\tau \in (-\infty, T),\ t \in [t_0, T),\ x \in [0, \infty)$ и удовлетворяют уравнениям системы (1.1) в точке $t = t_0$.

Интегральные уравнения Вольтерра с неизвестным пределом интегрирования находят многочисленные приложения [1, 3, 15, 16]. Они служат для описания моделей макроэкономики (см. ссылки в [8]), могут быть применены для описания задач замены оборудования в производственных системах [6, 16] (задача определения оптимального временного интервала для службы производственного оборудования [6]), используются в теории восстановления и математической экологии. В теории автоматического управления системы вида (1.1) представляют интегральную модель нелинейной динамической системы с входом $x(t)$ и неизвестной величиной задержки $t - y(t) > 0$.

Приведем для системы (1.1) теорему о существовании решения, доказанную Ю. П. Яценко в работе [16].

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $H(t,\tau,x)$, $K(t,\tau,x)$ положительны при $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $x \in (0, \infty)$;

2. интеграл $\int_{-\infty}^{t_0} K(t,\tau,\varphi_0(\tau))d\tau$ — расходится, $t \in [t_0, T)$;

3. $H(t,\tau,x)$, $K(t,\tau,x)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Липшица по x, t и, кроме того, $\frac{H(t,\tau,x)}{K(t,\tau,x)}$ — ограничена при $\tau \in (-\infty, T)$, $t \in [t_0, T)$, $x \in [0, \infty)$.

Тогда система уравнений (1.1) имеет единственное решение $x(t) \in C[t_0, T)$, $y(t) \in C[t_0, T)$, такое, что $x(t) > 0$, $y(t) < t$.

2 Итерационный метод

Для построения приближенного метода решения системы (1.1) на отрезке $[t_0, T]$, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} P_1(x(t), y(t)) \equiv x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau,x(\tau))d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) \equiv f(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau,x(\tau))d\tau = 0, \end{cases} \qquad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{2.1}$$

или в операторной форме

$$P(X) = \big(P_1(X), P_2(X)\big) = 0,\ X = (x(t), y(t)). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) будем решать модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Предложенный ниже алгоритм является обобщением итерационно-проекционного метода, построенного в [2], на случай нелинейности по переменной x ядер $H(t,\tau,x)$ и $K(t,\tau,x)$ интегральных уравнений системы (1.1) (см также [9]).

Итерационный процесс примет вид

$$X_{m+1} = X_m - [P'(X_0)]^{-1}(P(X_m)),\ m = 0, 1, \ldots, \tag{2.3}$$

где $X_0 = (x_0(t), y_0(t))$ — начальное приближение.

Нетрудно показать, что производная $P'(X_0)$ нелинейного оператора $P(X)$ в точке X_0 определяется матрицей из частных производных

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial P_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial P_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}$$

Следовательно, система относительно поправки на первой итерации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial x(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x(t)) + \frac{\partial P_1}{\partial y(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta y(t)) = -P_1(x_0(t), y_0(t)) \\ \frac{\partial P_2}{\partial x(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta x(t)) + \frac{\partial P_2}{\partial y(t)}\Big|_{(x_0,y_0)}(\Delta y(t)) = -P_2(x_0(t), y_0(t)), \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\Delta x(t) = x_1(t) - x_0(t),\ \Delta y(t) = y_1(t) - y_0(t)$;

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = \lim_{s\to 0}\frac{P_1(x_0+sx, y_0) - P_1(x_0,y_0)}{s} = x(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = H\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)y(t);\quad \frac{\partial P_2}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))x(\tau)d\tau;$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = K\big(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\big)y(t);$$

$$H_3(t,\tau,x_0) = \frac{\partial H(t,\tau,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=x_0},\quad K_3(t,\tau,x_0) = \frac{\partial K(t,\tau,x)}{\partial x}\Bigg|_{x=x_0}.$$

(Предполагается, что ядра H и K — дифференцируемы по переменной x в точке x_0.)

Таким образом, система (2.4) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta x(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + H\big(t,y_0(t),x_0(y_0(t))\big)\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_0(t)}^{t} H(t,\tau,x_0(\tau))d\tau - x_0(t), \\ -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x(\tau)d\tau + K\big(t,y_0(t),x_0(y_0(t))\big)\Delta y(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_0(t)}^{t} K(t,\tau,x_0(\tau))d\tau - f(t). \end{cases} \tag{2.5}$$

Система интегральных уравнений (2.5) — линейна, решая ее относительно $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$, находим $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$. Продолжив этот процесс, получим последовательность приближенных решений $\big(x_m(t), y_m(t)\big)$, определяемых из систем

$$\begin{cases} \Delta x_m(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} H_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x_m(\tau)d\tau + H\big(t,y_0(t),x_0(y_0(t))\big)\Delta y_m(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} H(t,\tau,x_{m-1}(\tau))d\tau - x_{m-1}(t), \\ -\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x_m(\tau)d\tau + K\big(t,y_0(t),x_0(y_0(t))\big)\Delta y_m(t) = \\ \qquad\qquad = \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} K(t,\tau,x_{m-1}(\tau))d\tau - f(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t),\ \Delta y_m(t) = y_m(t) - y_{m-1}(t),\ m = 2, 3, \ldots.$

Таким образом, для нахождения каждого следующего приближения требуется решение системы двух линейных интегральных уравнений Вольтерра. При этом ядра уравнений в левых частях на каждом шагу остаются неизменными.

Пусть $\overline{C} = \big\{X = \{x(t), y(t)\} : \ x(t), y(t) \in C_{[t_0,T]}\big\}$ — векторное функциональное пространство с нормой $\|X\|_{\overline{C}} = \max\{\|x\|_{C_{[t_0,T]}}, \|y\|_{C_{[t_0,T]}}\}$. Сформулируем теорему сходимости для итерационного процесса (2.6) [5, 2]:

Т е о р е м а 2.1. *Пусть оператор P имеет непрерывную вторую производную в шаре Ω_0 ($\|X - X_0\| \leqslant r$) и выполняются следующие условия:*

1. *система* (2.5) *имеет в области $[t_0, T]$ единственное решение, т.е. существует $\Gamma_0 = [P'(X_0)]^{-1}$;*

2. $\|\Delta X\| = \max\{\|\Delta x\|_{C_{[t_0,T]}}, \|\Delta y\|_{C_{[t_0,T]}}\} \leqslant \eta$;

3. $\|\Gamma_0 P''(X)\| \leqslant L$ *в* Ω_0.

Тогда, если $h = L\eta < \frac{1}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta \leqslant r \leqslant \frac{1+\sqrt{1-2h}}{h}\eta$, то уравнение (2.2) *имеет в Ω_0 единственное решение X^*, к которому сходится процесс* (2.6)*, а скорость сходимости оценивается неравенством*

$$\|X^* - X_m\| \leqslant \frac{\eta}{h}(1 - \sqrt{1-2h})^{m+1},\ m = 0, 1, \ldots.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы проверим выполнение условия 1 и проверим ограниченность второй производной, необходимой для оценки константы L в условии 3.

Так как в условиях теоремы 1.1, функции H и K положительны, то, исключив из системы (2.6) $\Delta y(t)$, имеем

$$\begin{cases} \Delta x_m(t) - \int\limits_{y_0(t)}^{t} h_0(t,\tau)\Delta x_m(\tau)d\tau = F_m(t), \\ \Delta y_m(t) = \frac{1}{K\left(t, y_0(t), x_0(y_0(t))\right)} \left[\int\limits_{y_0(t)}^{t} K_3(t,\tau,x_0(\tau))\Delta x_m(\tau)d\tau + \right. \\ \left. + \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} K(t,\tau,x_{m-1}(\tau))d\tau - f(t)\right]. \end{cases} \tag{2.7}$$

где

$$h_0(t,\tau) = H_3(t,\tau,x_0(\tau)) - \frac{H\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)}{K\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)} K_3(t,\tau,x_0(\tau)),$$

$$F_m(t) = \int\limits_{y_{m-1}(t)}^{t} \left[H(t,\tau,x_{m-1}(\tau)) - \frac{H\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)}{K\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)} K(t,\tau,x_{m-1}(\tau)) \right] d\tau +$$

$$+ \frac{H\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)}{K\big(t, y_0(\tau), x_0(y_0(\tau))\big)} f(t) - x_{m-1}(t).$$

Первое уравнение в системе (2.7) является линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода с непрерывными коэффициентами. Поэтому, выбрав начальное приближение $y_0(t)$ таким, чтобы $Y_0 \leqslant y_0(t) \leqslant t$, делаем вывод, что это уравнение имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений (см. например [7]). Функция $\Delta y_m(t)$ затем однозначно определяется из второго уравнения системы (2.7).

Таким образом, система (2.6) имеет единственное решение (в том числе при $m = 1$), т.е. выполняется условие 1 теоремы.

Нетрудно проверить, что достаточным условием ограниченности второй производной $P''(X_0)(X)$ является дифференцируемость начального приближения $x_0(t)$ и функций H и K по второй переменной. Доказательство окончено.

Покажем теперь, что для достаточно больших m будет выполнено условие $y_m(t) < t$.

Действительно, так как точное решение системы (1.1) $y^*(t) < t$, то $\max\limits_{t\in[t_0,T]} y^*(t) = t - q$, где $q = const > 0$. Из теоремы 2.1 следует, что $\|y_m - y^*\| \leqslant \varepsilon_m$, т.е.

$$\max_{t\in[t_0,T]} |y_m(t) - y^*(t)| \leqslant \varepsilon_m,$$

$$|y_m(t) - y^*(t)| \leqslant \varepsilon_m, \forall t \in [t_0, T],$$

$$-\varepsilon_m \leqslant y_m(t) - y^*(t) \leqslant \varepsilon_m,$$

$$y^*(t) - \varepsilon_m \leqslant y_m(t) \leqslant y^*(t) + \varepsilon_m,$$

или

$$y_m(t) \leqslant t - q + \varepsilon_m < t, \text{ при } \varepsilon_m < q,$$

что достигается выбором достаточно большого числа итераций m.

3 Уравнения Вольтерра с переменной задержкой

На каждом шаге итерационного процесса (2.6) возникает необходимость решения линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода следующего вида

$$x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = F(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{3.1}$$

где $y(t) < t$ — неубывающая функция, $y(t_0) = Y_0 < t_0$, $x(t) = \varphi_0(t)$ при $t \leqslant t_0$.

Для решения уравнения (3.1) воспользуемся методом последовательных приближений:

$$x_{n+1}(t) = F(t) + \int\limits_{y(t)}^{t} h(t,\tau)x_n(\tau)d\tau, \quad t \in [t_0, T],\ x_0(t) = F(t). \tag{3.2}$$

Введем на отрезке $[t_0, T]$ равномерную сетку (w), состоящую из точек $t_i = t_0 + (T - t_0)\frac{i}{N},\ i = \overline{1, N}$. Каждый из интервалов $[t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1, N}$, разобьем в свою очередь точками

$$t_k^j = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} + \frac{t_k - t_{k-1}}{2}\xi_j, \quad t_k^0 = t_{k-1}\ j = \overline{1, r-2},\ k = \overline{1, N},$$

где ξ_j — нули многочлена Лежандра степени $r - 2$, а параметр r зависит от гладкости входящих в интегральное уравнение (3.1) функций.

Значения очередного приближения в точках t_k^j будем определять из равенств

$$x_{n+1}(t_k^j) = F(t_k^j) + \int\limits_{y(t_k^j)}^{t_k^j} h(t_k^j,\tau)x_n(\tau)d\tau,\ j = \overline{0, r-2},\ k = \overline{1, N}. \tag{3.3}$$

Приближенное решение на каждой итерации представляет собой непрерывный полиномиальный сплайн $\tilde{x}_n(t)$, составленный из N интерполяционных полиномов степени $r-1$, построенных по узлам t_k^j и t_k, $j = \overline{0, r-2}$, для каждого интервала $[t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1, N}$.

Введем на сетке (w) целочисленную функцию

$$V_w(t) = \begin{cases} l, & \text{при } t \in (t_{l-1}, t_l],\ l = \overline{1, N}, \\ 0, & \text{при } t \notin (t_0, T] \end{cases}$$

и обозначим $V_{k,j} = V_w(y(t_k^j))$. Тогда равенства (3.3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} x_{n+1}(t_k^j) = F(t_k^j) + \int\limits_{y(t_k^j)}^{t_{V_{k,j}}} h(t_k^j,\tau)\varphi_0(\tau)d\tau + \\ + \sum_{i=V_{k,j}+1}^{k-1} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} h(t_k^j,\tau)x_n(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k^j} h(t_k^j,\tau)\tilde{x}_n(\tau)d\tau, \quad j = \overline{0, r-2},\ k = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Первый интеграл по отрезку $[y(t_k^j), t_{V_{k,j}}]$в формуле (3.4) вычисляем по квадратурной формуле Гаусса с $(r-2)$ узлами, а в случае если $t_{V_{k,j}} - y(t_k^j) > \frac{T-t_0}{N}$ — по составной формуле Гаусса с шагом, не большим $\frac{T-t_0}{N}$. Для вычисления остальных интегралов в (3.4) также используется формула Гаусса с $(r-2)$ узлами, при этом в качестве промежуточных значений приближения $x_n(t)$ при аппроксимации последнего интеграла используются значения сплайна $\tilde{x}_n(t)$.

На практике часто бывает удобно использовать аппроксимацию точного решения кусочно-линейной функцией $(r = 2)$. Прямой численный метод решения уравнений вида (3.1) для этого случая подробно описан в [2].

Численная реализация предложенного алгоритма решения систем вида (1.1) на модельных задачах подтверждает его высокую эффективность.

4 Прямой метод

Одной из главных трудностей в применении итерационных методов является выбор "достаточно хорошего"начального приближения, обеспечивающего сходимость процесса. В этом параграфе построен прямой численный метод для определения приближенного решения для случая систем с ядрами, линейными по переменной x (см. также [8, 10, 11]).

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} x(t) = \int\limits_{y(t)}^{t} H(t,\tau)x(\tau)d\tau, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} K(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \end{cases} \qquad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.1}$$

методов

Для построения приближенного решения системы (4.1) разобьем весь интервал планирования $[t_0, T]$ на N частей точками $t_k = t_0 + (T - t_0)\frac{k}{N},\ k = \overline{0, N}$.

Решение будем искать в виде кусочно-постоянной функции $x_N(t)$ и кусочно-линейной $y_N(t)$.

Сложность построения вычислительной схемы для определения приближенных решений $x_N(t)$ и $y_N(t)$ системы (4.1) заключается в аппроксимации интегралов системы квадратурными суммами, ввиду того, что одна из неизвестных функций содержится в пределе интегрирования, т. е. даже для фиксированного значения $t = t_k$ неизвестна длина интервала интегрирования.

Обозначим через v_k номер сегмента, на который попадает значение $y_k = y(t_k)$, т. е. $y_k \in [t_{v_k-1}, t_{v_k}]$.

Потребуем, чтобы в точках $t = t_k$ уравнения системы (4.1) обращались в равенства:

$$\begin{cases} x(t_k) = \int\limits_{y(t_k)}^{t_k} H(t_k,\tau)x(\tau)d\tau, \\ \int\limits_{y(t_k)}^{t_k} K(t_k,\tau)x(\tau)d\tau = f(t_k), \quad k = \overline{1,N}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Отметим, что значения функций $x(t)$ и $y(t)$ при $0 < t \leqslant t_0$ считаются известными (заданная предыстория).

Представим далее систему (4.2) в виде

$$\begin{cases} x_k = \int\limits_{y_k}^{t_{v_k}} H(t_k,\tau)x(\tau)d\tau + \sum\limits_{j=v_k}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} H(t_k,\tau)x(\tau)d\tau, \\ \int\limits_{y_k}^{t_{v_k}} K(t_k,\tau)x(\tau)d\tau + \sum\limits_{j=v_k}^{k-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} K(t_k,\tau)x(\tau)d\tau = f_k, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $x_k = x(t_k),\ y_k = y(t_k),\ f_k = f(t_k),\ k = \overline{1,N}$.

Возможны два случая для каждого k.

Случай I. $v_k = k$.

Используя на малых участках для интегралов квадратурную формулу прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_k - y_k)H(t_k,t_k)x_k \\ f_k = (t_k - y_k)K(t_k,t_k)x_k. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_k = \frac{f_k H(t_k,t_k)}{K(t_k,t_k)}, \quad y_k = t_k - \frac{1}{H(t_k,t_k)}, \ k = \overline{1,N}, \tag{4.4}$$

причем $K(t,t),\ H(t,t) \neq 0$ при $t \in [t_0, T]$ из экономических соображений.

Случай II. $v_k < k$.

Применяя к (4.3) формулу средних прямоугольников, имеем

$$\begin{cases} x_k = (t_{v_k} - y_k)H(t_k,t_{v_k})x_{v_k} + (t_k - t_{k-1})H(t_k,t_{k-0.5})x_k + S_H(v_k) \\ f_k = (t_{v_k} - y_k)K(t_k,t_{v_k})x_{v_k} + (t_k - t_{k-1})K(t_k,t_{k-0.5})x_k + S_K(v_k), \end{cases}$$

где

$$S_H(v_k) = \sum_{j=v_k}^{k-2} H(t_k,t_{j+0.5})x_{j+1},$$

$$S_K(v_k)=\sum_{j=v_k}^{k-2}K(t_k,t_{j+0.5})x_{j+1},$$

$$t_{k-0.5}=\frac{t_{k-1}+t_k}{2},\ t_{k+0.5}=\frac{t_k+t_{k+1}}{2}.$$

Следовательно,

$$x_k-f_k=(t_{v_k}-y_k)x_{v_k}\Big[H(t_k,t_{v_k})-K(t_k,t_{v_k})\Big]+S_H(v_k)-$$

$$-S_K(v_k)+(t_k-t_{k-1})x_k\Big[H(t_k,t_{k-0.5})-K(t_k,t_{k-0.5})\Big].$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_k=\frac{f_k+(t_{v_k}-y_k)x_{v_k}\Big[H(t_k,t_{v_k})-K(t_k,t_{v_k})\Big]+S_H(v_k)-S_K(v_k)}{1+(t_k-t_{k-1})\Big[K(t_k,t_{k-0.5})-H(t_k,t_{k-0.5})\Big]}, \\ \\ (t_{v_k}-y_k)x_{v_k}=\frac{f_k-(t_k-t_{k-1})K(t_k,t_{k-0.5})x_k-S_K(v_k)}{K(t_k,t_{v_k})}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$x_k=\frac{f_k+\frac{\Big(f_k-(t_k-t_{k-1})K(t_k,t_{k-0.5})x_k-S_K(v_k)\Big)\Big[H(t_k,t_{v_k})-K(t_k,t_{v_k})\Big]}{K(t_k,t_{v_k})}+S_H(v_k)-S_K(v_k)}{1+(t_k-t_{k-1})\big[K(t_k,t_{k-0.5})-H(t_k,t_{k-0.5})\big]}.$$

Обозначив

$$A=\frac{H(t_k,t_{v_k})-K(t_k,t_{v_k})}{K(t_k,t_{v_k})},$$

$$B=1+(t_k-t_{k-1})\big[K(t_k,t_{k-0.5})-H(t_k,t_{k-0.5})\big],$$

получаем окончательно

$$\begin{cases} x_k=\frac{S_H(v_k)+(1+A)(f_k-S_K(v_k))}{B+A(t_k-t_{k-1})K(t_k,t_{k-0.5})}, \\ \\ y_k=t_{v_k}+\frac{S_K(v_k)-f_k+(t_k-t_{k-1})K(t_k,t_{k-0.5})x_k}{x_{v_k}K(t_k,t_{v_k})}, \quad k=\overline{1,N}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Таким образом, при знании номеров $v_k,\ k=\overline{1,N}$, приближенные значения x_k и y_k искомых функций в точках сетки могут быть найдены по формулам (4.4),(4.5).

Идея определения номеров v_k состоит в последовательном для каждого номера узла $k=1,2,\dots,N$, переборе возможных значений $v_k: v_k=1,\ v_k=2,\dots,v_k=k$, и нахождении соответствующих значений x_k и y_k по формулам (4.4),(4.5). Перебор прекращается в случае выполнения условия $y_k\in[t_{v_k-1},t_{v_k}]$, подтверждающего предположение о принадлежности y_k указанному интервалу.

Нетрудно видеть, что погрешность приближенного решения системы (4.1) по вычислительной схеме (4.4),(4.5) составляет $O(\frac{1}{N})$.

5 Численные примеры

Ниже приведены некоторые численные результаты работы как прямого численного метода (задачи 1-2), так и более сложного итерационного алгоритма (задачи 3-4).

Модельная задача 1.

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} e^{t\tau} x(\tau) d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = e^{t \frac{t^2 - \ln(e^{t^2} - t - 1)}{t+1}}, \end{cases} \qquad t \in [3,5], \tag{5.1}$$

Отметим, что первое уравнение в системе (5.1) имеет невырожденное быстрорастущее ядро $H(t,\tau)$.

Точным решением системы (5.1) являются функции

$$x^*(t) = e^t, \; y^*(t) = \frac{t + \ln(e^{t^2} - t - 1)}{t+1}.$$

Будем использовать следующие обозначения: **N** — число узлов,
$\varepsilon_x = \max\limits_i |x_m(t_i) - x^*(t_i)|$, $\varepsilon_y = \max\limits_i |y_m(t_i) - y^*(t_i)|$ — точность в узлах.

$\mathbf{N}$	$\varepsilon_{\mathbf{x}}$	$\varepsilon_{\mathbf{y}}$
10	0.0018	$2.68 \cdot 10^{-9}$
20	0.0031	$9.2 \cdot 10^{-9}$
50	0.0041	$1.89 \cdot 10^{-8}$
100	0.0045	$2.41 \cdot 10^{-8}$
150	0.0047	$2.6 \cdot 10^{-8}$

Таблица 1: Точность решения (5.1)

Модельная задача 2.

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} t\tau x(\tau) d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} \tau x(\tau) d\tau = 1, \end{cases} \qquad t \in [10,15], \tag{5.2}$$

Точным решением системы (5.2) являются функции $x^*(t) = t$ и $y^*(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3}$.

N	$\varepsilon_\mathbf{x}$	$\varepsilon_\mathbf{y}$
30	$4.62 \cdot 10^{-14}$	0.0052
60	$2.13 \cdot 10^{-14}$	0.0012
100	$1.24 \cdot 10^{-14}$	0.0004
200	$7.11 \cdot 10^{-15}$	$7.31 \cdot 10^{-5}$
500	$1.78 \cdot 10^{-15}$	$9.96 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2: Точность решения (5.2)

Модельная задача 3 (линейные ядра).

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} t\tau x(\tau)d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} \tau x(\tau)d\tau = 6, \end{cases} \qquad t \in [10, 15]. \tag{5.3}$$

Точное решение: $x^*(t) = 6t,\ y^*(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3}$.

Ниже используются следующие обозначения: $\mathbf{N}$ — число узлов, $\mathbf{m}$ — число итераций; $\varepsilon_x = \max\limits_i |X_m^N(t_i) - x^*(t_i)|$, $\varepsilon_y = \max\limits_i |Y_m^N(t_i) - y^*(t_i)|$ — погрешность в узлах.

Результаты для системы (5.3) при начальном приближении $x_0(t) = 2t+50,\ y_0(t) = 0.9t)$ приведены в Таблице 3:

N	m	$\varepsilon_\mathbf{x}$	$\varepsilon_\mathbf{y}$
50	1	$7.11 \cdot 10^{-12}$	0.26
50	2	$8.14 \cdot 10^{-12}$	0.083
50	5	$6.12 \cdot 10^{-15}$	0.00215
50	10	$3.29 \cdot 10^{-15}$	$5.04 \cdot 10^{-6}$
50	20	$3.01 \cdot 10^{-15}$	$2.78 \cdot 10^{-11}$
50	30	$3.01 \cdot 10^{-15}$	$3.35 \cdot 10^{-13}$

Таблица 3:

Таблица 4 содержит результаты для системы (5.3) при использовании менее точного начального приближения $x_0(t) = 30,\ y_0(t) = 2t$.

N	**m**	$\varepsilon_{\mathbf{x}}$	$\varepsilon_{\mathbf{y}}$
50	1	$6.21 \cdot 10^{-11}$	37.50
50	2	$7.86 \cdot 10^{-12}$	14.76
50	3	$5.24 \cdot 10^{-13}$	9.57
50	4	$8.17 \cdot 10^{-14}$	4.81
50	5	$7.12 \cdot 10^{-14}$	1.29
50	10	$2.97 \cdot 10^{-14}$	0.0051
50	20	$1.31 \cdot 10^{-14}$	$2.88 \cdot 10^{-6}$
50	30	$1.05 \cdot 10^{-14}$	$2.76 \cdot 10^{-9}$
50	50	$1.01 \cdot 10^{-14}$	$3.47 \cdot 10^{-13}$

Таблица 4:

Модельная задача 4 (нелинейные ядра).

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_{y(t)}^{t} e^{t\tau} x^3(\tau) d\tau = 0, \\ \int\limits_{y(t)}^{t} \sqrt{x(\tau)} d\tau = e^t - \left(e^{2t} \left[e^{t^2+6t} - t - 8 \right] \right)^{\frac{1}{t+8}}, \end{cases} \qquad t \in [3,4], \tag{5.4}$$

Точное решение системы (5.4):

$$x^*(t) = e^{2t},\ y^*(t) = \frac{2t + \ln(e^{t^2+6t} - t - 8)}{t+8}.$$

В качестве начального приближения возьмем функции $x_0(t) = 10t,\ y_0(t) = t$. Таблица 5 отражает результаты для данного случая.

Список литературы

[1] *Baker C.T.H.* A perspective on the numerical treatment of Volterra equations. *J. Comp. Appl. Math.* Vol.125(2000), 217-249

[2] *Бойков И.В., Тында А.Н.* Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем. *Дифференциальные уравнения*, т. 39, N 9, 2003, с. 1214-1223.

N	**m**	$\varepsilon_{\mathbf{x}}$	$\varepsilon_{\mathbf{y}}$
100	1	0.049	0.00015
100	2	0.0092	$1.10 \cdot 10^{-6}$
100	3	0.0014	$1.18 \cdot 10^{-6}$
100	5	0.0012	$9.07 \cdot 10^{-10}$
100	10	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$3.76 \cdot 10^{-10}$
200	10	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-10}$
500	10	$4.31 \cdot 10^{-6}$	$7.92 \cdot 10^{-11}$
1000	10	$5.72 \cdot 10^{-7}$	$9.18 \cdot 10^{-13}$

Таблица 5:

[3] *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем.– Москва: Наука, 1983. - 352с.

[4] *Иванов В.В., Вугинштейн А.Э.* О континуальных моделях развивающихся систем. *Дифференциальные уравнения*, 1985, 19, N3, с. 473-484.

[5] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1979.- 744с.

[6] *Sheu S.-H.* A generalized block replacement policy with minimal repair and general random repair costs for a milti-unit system. *J. Oper. Res. Soc.* **42** 1991, pp. 331-341.

[7] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, т.IV. Москва, Гос. изд. тех.-теор. лит., 1957г.

[8] *Тында А.Н.* Об одном прямом методе решения системы нелинейных интегральных уравнений двухсекторной модели экономики. *Труды Средневолжского Математического Общества*, Том 8(2006), є1, с. 351-358.

[9] *Тында А.Н.* Решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с неизвестной задержкой. *Труды Средневолжского Математического Общества*, Том 9, 2007, N1, с. 253-259.

[10] Tynda A.N. On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays. Proceedings of II Int. Conf. "ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR MODELLING OF NATURAL SCIENCE AND SOCIAL PROBLEMS", Penza, 2007, p. 39-43.

[11] Tynda A.N., Direct numerical methods for the systems of Volterra integral equations with nonlinear delay-time. *Труды Труды Средневолжского Математического Общества*, 2008, Том 10, No.1, 306-311.

[12] Tynda A.N., Numerical algorithms of optimal complexity for weakly singular Volterra integral equations, *Comp. Meth. Appl. Math.*, Vol.6(2006) No. 4, p.436-442.

[13] *Hritonenko N., Yatsenko Yu.* Mathematical Modeling in Economics, Ecology, and the Environment, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.

[14] *Hritonenko N., Yatsenko Yu.* Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 127(2005), 109-127.

[15] *Яценко Ю.П.* Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев, Наукова думка, 1991.

[16] *Yatsenko Yu.* Volterra integral equations with unknown delay time. *Methods and Applications of Analysis*, **2** (4) 1995, pp. 408-419.