

ГРУППА ПРОЕКТИВНЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

О.В. Самарина

Введение

При исследовании цифровых многоканальных изображений достаточно часто возникает задача определения характеристик изображения, инвариантных относительно проективной группы преобразований изображения, т.е. преобразований, возникающих в результате различного положения фотокамеры и различной калибровки каналов в момент съемки. Характеристики изображения такого рода могут быть использованы в таких задачах обработки изображений, как задача распознавания, отыскания снимка по образцу, задача фотограмметрии, и т. д. [1, 2].

В данной работе определяется и исследуется новая характеристика изображения – группа инвариантов многоканального изображения относительно проективных преобразований и калибровки каналов. Данная группа инвариантов является эффективной характеристикой изображения, и её можно использовать в самых различных прикладных задачах обработки изображений.

Группа проективных инвариантов многоканальных изображений

В математической постановке N - канальное изображение представляет собой N неотрицательных функций в некоторой области на плоскости. В данной работе будем предполагать, что функции 1-раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо разложение Тейлора 1-го порядка с центром в произвольной точке области. Можно считать, не ограничивая общности, что данная точка – начало координат на плоскости. Получим

$$f^i(x, y) = a^i + p_1^i x + p_2^i y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

где $i = \overline{1, N}$.

Наиболее естественной группой преобразований снимков является группа проективных преобразований. Общее проективное преобразование плоскости имеет вид:

$$x^* = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}, \quad y^* = \frac{c_{21}x + c_{22}y + c_{23}}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}.$$

Рассмотрим подгруппу проективных преобразований с неподвижной точкой в начале координат:

$$x^* = \frac{c_{11}x + c_{12}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}, \quad y^* = \frac{c_{21}x + c_{22}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}}.$$

Нетрудно заметить, что эта подгруппа имеет размерность 5.

Предположим, что снимок подвергся проективному преобразованию и калибровке каналов:

$$(1) \quad \Theta(\lambda, x^*, y^*) : \mathbf{f}(x, y) \rightarrow e^{\lambda \mathbf{f}} \left(\left(\frac{c_{11}x + c_{12}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \right), \left(\frac{c_{21}x + c_{22}y}{c_{31}x + c_{32}y + c_{33}} \right) \right).$$

Здесь коэффициенты $e^\lambda = [e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_N}]$ соответствуют калибровке N слоев (множители e^{λ_i} можно интерпретировать как факторы поглощения среды, действующие в окрестности исследуемой точки и соответствующие частотному диапазону данного слоя). Пусть $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]$ – соответствующий вектор. Нетрудно видеть, что преобразования $\Theta(\lambda, x^*, y^*)$ образуют $5 + N$ -мерную коммутативную группу Ли G .

Рассматривая действие группы G на пространстве $J_N^k = J^k(R^2, R^N)$ k -струй функций (тейлоровских разложений k -го порядка), получим, что группа G действует в пространстве размерности $n(k, N) = \frac{N(k+1)(k+2)}{2}$. Здесь k – порядок тейлоровского разложения, а N – число каналов.

Определение 1. Будем называть числовую функцию $I : J_N^k \rightarrow R$, нетождественно равную константе, инвариантом k -го порядка, если под действием преобразований группы G она не меняется.

Замечание. В нашем случае размерность пространства инвариантов равна $\dim(I) = \dim(J_N^k) - \dim(G)$.

Теорема 1. Следующая функция является инвариантом:

$$(2) \quad I = \frac{a^i (p_2^j p_1^r - p_1^j p_2^r)}{a^j (p_1^i p_2^r - p_2^i p_1^r)},$$

где $i, j, r = \overline{1, N}$ при условии, что $i \neq j \neq r$.

Доказательство. Проверяется непосредственно. □

Практическая часть

Рассмотрим восьмиканальное изображение, полученное со спутника Landsat 7. Данный спутник обеспечивает съемку земной поверхности в шести зонах с разрешением 30 м, в инфракрасной зоне – с разрешением 60 м, и одновременную панхроматическую съемку с разрешением 15 м.

Представим восьмиканальное изображение в виде

$$f^i(x, y) = a^i + p_1^i x + p_2^i y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

где $i = \overline{1, 8}$ и предположим, что снимок подвергся проективному преобразованию и калибровке каналов. Нетрудно видеть, что преобразования $\Theta(\lambda, x^*, y^*)$ образуют $5 + 8 = 13$ -мерную коммутативную группу Ли G .

Рассматривая действие группы G на пространстве J_8^1 тейлоровских разложений 1-го порядка, получим, что группа G действует в пространстве размерности $n(1, 8) = \frac{8(1+1)(1+2)}{2} = 24$. Таким образом размерность пространства инвариантов равна $\dim(I) = \dim(J_8^1) - \dim(G) = 24 - 13 = 11$, т.е. базис пространства инвариантов восьмиканального изображения состоит из 11 инвариантов.

Общий вид инвариантов для восьмиканального изображения представлен в теореме 1. Согласно формуле 2 в построении одного инварианта участвуют коэффициенты тейлоровского разложения только трех каналов. Используя формулу числа сочетаний без повторов из 8 по 3 получим, что общее количество возможных инвариантов восьмиканального изображения равно

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = 56.$$

Так как пространство инвариантов имеет размерность 11, то $56 - 11 = 45$ инвариантов выражаются через независимый набор из одиннадцати инвариантов.

Для обработки космических снимков в данной работе применялось 6 инвариантов из базиса пространства инвариантов восьмиканального изображения:

$$I_1 = \frac{a^1 (p_2^2 p_1^3 - p_1^2 p_2^3)}{a^2 (p_1^1 p_2^3 - p_2^1 p_1^3)}, \quad I_2 = \frac{a^2 (p_2^3 p_1^5 - p_1^3 p_2^5)}{a^3 (p_1^2 p_2^5 - p_2^2 p_1^5)}, \quad I_3 = \frac{a^1 (p_2^4 p_1^7 - p_1^4 p_2^7)}{a^4 (p_1^1 p_2^7 - p_2^1 p_1^7)},$$

$$I_4 = \frac{a^4 (p_2^5 p_1^6 - p_1^5 p_2^6)}{a^5 (p_1^4 p_2^6 - p_2^4 p_1^6)}, \quad I_5 = \frac{a^5 (p_2^6 p_1^8 - p_1^6 p_2^8)}{a^6 (p_1^5 p_2^8 - p_2^5 p_1^8)}, \quad I_6 = \frac{a^6 (p_2^7 p_1^8 - p_1^7 p_2^8)}{a^7 (p_1^6 p_2^8 - p_2^6 p_1^8)}.$$

При помощи указанных инвариантов для набора восьмиканальных изображений были получены точки для сопоставления изображений. Далее при помощи программного модуля, разработанного в системе Matlab, проведена процедура привязки изображений по указанным точкам. На рисунке 1 изображены два восьмиканальных изображения для которых были найдены точки сопоставления и проведена процедура привязки (рис. 2).

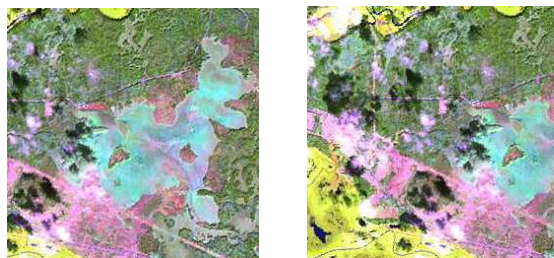


Рис. 1. Космические снимки

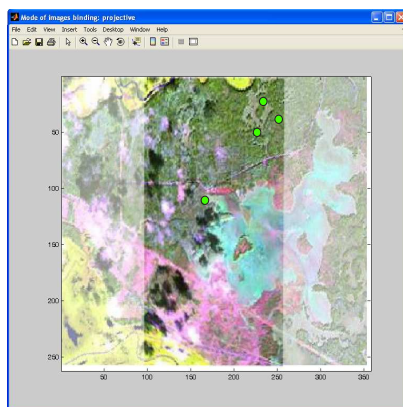


Рис. 2. Совмещенные изображения

Заключение

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о том, что рассмотренная в данной статье группа инвариантов относительно проективных преобразований и калибровки каналов является эффективной характеристикой изображения и её можно использовать в различных прикладных задачах обработки изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кашкин, В.Б. Дистанционное зондирование Земли из космоса. Цифровая обработка изображений : учебное пособие / В.Б. Кашкин, А.И. Сухинин. – М. : Логос, 2001. – 264 с.
- [2] Лурье, И.К. Компьютерный практикум по цифровой обработке изображений и созданию ГИС. Дистанционное зондирование и географические информационные системы / [И.К. Лурье и др.]. – М. : Научный мир, 2004. – 148 с.